- من اجل أي قيمة لـ θ تكون مساحة المستطيل اعظمية ؟

42 -

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و الدالة f' منحناها البياني كما هو موضح في الشكل المجاور.

من اجل كل معلومة من المعلومات التالية ما هي الصحيحة و الخاطئة منها ؟

1) f تقبل قيمة صغرى من اجل $x=\frac{-1}{2}$

2) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=0$

3) f متناقصة تماما على $]1,+\infty[$

4) إذا كان $f(-2)=1$ فإنه من اجل كل $x\in[-2,1]$ يكون $f(x)\geq 1$

5) معادلة المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -2 هي $y=\frac{-2}{3}$.



43 -

1) لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=2x^3+x^2-1$

أ) ادرس اتجاه تغير g على $\mathbb{R}$.

ب) برهن ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ، ثم اعط حصرا لـ α بتقريب 10^{-1} بالزيادة. و عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

2) لتكن f دالة معرفة على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right)$

أ) برهن ان من أجل كل $x\neq 0$ إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير f و احسب نهاية f عند 0 ، $+\infty$ ، $-\infty$

جـ) برهن ان $f(\alpha)=\frac{\alpha}{6}+\frac{1}{2\alpha}$ و استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3) نسمي (γ) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ (طول الوحدة 3cm) و لتكن I نقطة من (γ) فاصلتها -1 و J نقطة من (γ) فاصلتها 1 .

أ) تحقق ان المستقيم (IJ) مماس لـ (γ) عند J.

ب) عين معادلة للمماس (T) للمنحني (γ) عند I ثم ادرس وضعية (γ) بالنسبة لهذا المماس.

جـ) باستعمال كل النتائج السابقة ارسم (γ) (تاخذ $\frac{2}{3}$ كقيمة مقربة لـ α).

الدرس 4

الدَّالةُ الأسِّيَة

1 . دراسة المعادلة التفاضلية $f'=f$ مع $f(0)=1$

مثال -

تقبل انه توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=f(x)$ و $f(0)=1$.

نريد إنشاء المنحنى البياني التقريبي للدالة f باستعمال مجيول (طريقة أولر) على $[-1,1]$.

1) باستعمال التقريب التالي $f(a+h)\approx f(a)+h\times f'(a)$

أ) عين قيمة تقريبية لـ $f(0,5)$ و $f(1)$ بخطوة $h=0,5$

ب) عين قيمة تقريبية لـ $f(-0,5)$ و $f(-1)$ بخطوة $h=-0,5$

2) على المجال $[0,1]$ نختار خطوة $h=0,1$ و نشكل متتالية النقط $M_n(x_n, y_n)$ حيث $y_n=f(x_n)$ و $x_0=0$ و $y_0=1$

أ) بين ان المتتالية (x_n) حسابية و (y_n) متتالية هندسية ثم اكتب x_n و y_n بدلالة n.

ب) اعط القيمة التقريبية لـ $y_n=f(x_n)$ مع $0\leq n\leq 10$ و $n\in\mathbb{N}$.

جـ) ارسم المنحنى البياني التقريبي للدالة f على المجال $[0,1]$ في معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ (طول الوحدة 0,1)

3) على المجال $[-1,0]$ نختار خطوة $h=-0,1$ و نشكل متتالية النقط $M_n(x_n\,,\,y_n)$ حيث $y_n=f(x_n)$ و $x_0=0$ و $y_0=1$

أ) اكتب x_n و $y_n=f(x_n)$ بدلالة n.

ب) اعط القيمة التقريبية لـ $y_n=f(x_n)$ حيث $0\leq n\leq 10$

جـ) ارسم المنحنى البياني التقريبي للدالة f على المجال $[-1,0]$ في نفس المعلم السابق.

✓ الحل

1) بما ان $f'(a)=f(a)$ فإن $f(a+h)\approx(1+h)\times f(a)$

أ) $f(0,5)=f(0+0,5)=(1+0,5)f(0)=1,5\times1=1,5$

$f(1)=f(0,5+0,5)=(1+0,5)f(0,5)=1,5\times1,5=2,25$

ب) $f(-0,5)=f(0-0,5)=(1-0,5)f(0)=0,5$

$f(-1)=f(-0,5-0,5)=(1-0,5)f(-0,5)=0,5\times0,5=0,25$

2) أ) النقطة M_0 احداثياتها $(0,1)$ و النقطة M_1 إحداثياتها $(x_1\,,\,y_1)$ حيث $x_1=x_0+h$ و $y_1=(1+h)y_0$.

النقطة M_2 إحداثياتها $(x_2\,,\,y_2)$ حيث $y_2=(1+h)y_1$ و $x_2=x_1+h$ و هكذا دواليك النقطة M_n إحداثياتها تحقق $x_n=x_{n-1}+h$ و $y_n=(1+h)y_{n-1}$ و منه نستنتج ان (x_n) متتالية حسابية أساسها h و (y_n) متتالية هندسية أساسها $(1+h)$.

بما ان $h=0,1$ فإن $x_n=x_0+nh=0,1n$ و $y_n=y_0\times(1+h)^n$ اي $y_n=(1,1)^n$

ب)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_n	1	1,1	1,21	1,33	1,46	1,61	1,77	1,94	2,14	2,35	2,59

جـ) المنحنى التقريبي للدالة f مشكل من قطع $[M_k\,M_{k+1}]$ حيث $n-1\geq k\geq 0$ و $M_k(0,1k\,;\,(1,1)^k)$

3) أ) المتتالية (x_n) معرفة كما يلي $x_n=x_{n-1}+h$ اي $x_n=x_{n-1}-0,1$ و عليه (x_n) متتالية حسابية أساسها -1. إذن $x_n=-0,1n$.

للتتالية (y_n) معرفة كمايلي $y_n=(1-0,1)y_{n-1}$ اي $y_n=0,9\,y_{n-1}$

وبالتالي (y_n) متتالية هندسية أساسها $0,9$ و عليه $y_n=1\times(0,9)^n$.

ب)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	0	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4	-0,5	-0,6	-0,7	-0,8	-0,9	-1
y_n	1	0,9	0,81	0,72	0,65	0,59	0,53	0,47	0,43	0,38	0,34

خاصية

إذا وجدت دالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$ فإنها لا تنعدم على $\mathbb{R}$.

الإثبات

لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=f(x)\times f(-x)$.

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة h' معرفة بـ

$h'(x)=f'(x)f(-x)-f'(-x)f(x)$

وبما انه $f'(x)=f(x)$ فإن عبارة $h'(x)$ تصبح $h'(x)=f(x)f(-x)-f(x)f(-x)=0$

إذن h دالة ثابتة.

بما انه $f(0)=1$ فإن $h(0)=f(0)f(0)=1$ و بالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $h(x)=1$

بما انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)f(-x)=1$ فإن $f(x)$ غير معدومة على $\mathbb{R}$.

مبرهنة

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$.

الإثبات

وجود الدالة f يقبل بدون برهان ولكن يلزمنا إثبات وحدانية f.

لتكن g دالة أخرى قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بحيث $g'=g$ و $g(0)=1$.

الدالة $\frac{g}{f}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $\left(\frac{g}{f}\right)'=\frac{g'f-gf'}{f^2}=0$

إذن الدالة $\frac{g}{f}$ ثابتة من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و بما أن $\left(\frac{g}{f}\right)(0)=\frac{g(0)}{f(0)}=\frac{1}{1}=1$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $\frac{g(x)}{f(x)}=1$ اي $g(x)=f(x)$ و هذا يدل على أن f وحيدة.

2. تعريف الدالة الأسية

نسمي دالة أسية، الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f'=f$ و $f(0)=1$ ونرمز لها بـ exp و نكتب $f(x)=\exp(x)$.

3 . خواص الدالة الأسية

1) الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي نفسها اي $\exp'(x)=\exp(x)$

2) الدالة الأسية مستمرة على $\mathbb{R}$ و $\exp(0)=1$

3) مهما يكن العددان الحقيقيان a و b لدينا $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$

4) مهما يكن العددان الحقيقيان a و b و العدد الصحيح n لدينا

$$\exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)} \quad ، \quad \exp(-a)=\frac{1}{\exp(a)} \quad ، \quad \exp(2a)=(\exp(a))^2$$

$$\exp(na)=(\exp(a))^n$$

5) مهما يكن العدد الحقيقي a يكون $\exp(a)>0$

الإثبات

نتحصل على الخاصيتين (1) و (2) من التعريف

3) لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب $g(x)=f(a+b-x)f(x)$ حيث f الدالة الأسية.

g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $g'(x)=-f(a+b-x)f(x)+f(a+b-x)f(x)=0$

إذن g دالة ثابتة.

بما ان $g(0)=f(a+b)f(0)=f(a+b)$ و $g(b)=f(a)f(b)$ فإن

$f(a+b)=f(a)\times f(b)$ اي $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$

4) - $\exp(2a)=\exp(a+a)=\exp(a)\times\exp(a)=(\exp(a))^2$

-لدينا $\exp(-a+a)=\exp(-a)\times\exp(a)$ و لدينا من جهة أخرى $\exp(-a+a)=1$

إذن $1=\exp(-a)\times\exp(a)$ و بالتالي $\exp(-a)=\frac{1}{\exp(a)}$

• $\exp(a-b)=\exp(a)\times\exp(-b)=\exp(a)\times\frac{1}{\exp(b)}=\frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

- نتقبل ان $\exp(na)=(\exp(a))^n$ (نبرهن على هذه الخاصية بالتراجع من اجل n طبيعي).

و من اجل n عدد صحيح سالب فإن $-n$ عدد طبيعي و لدينا

$$\exp(na)=(\exp-(-na))=\frac{1}{\exp(-na)}=\frac{1}{(\exp a)^{-n}}=(\exp a)^n$$

5) بكتابة $a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$ فيكون $\exp(a)=\exp\left(\frac{a}{2}\right)\times\exp\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\exp\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2$

و منه نستنتج $\exp(a)>0$.

مبرهنة

الدالة الأسية هي الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، غير معدومة، حيث

$f'(0)=1$ و $f(a+b)=f(a)\times f(b)$

الإثبات

الدالة الأسية تحقق الشروط الأربعة التالية:

(قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$) ، (غير معدومة) ، ($f'(0)=1$) ، ($f(a+b)=f(a)\times f(b)$).

لتكن f دالة أخرى تحقق هذه الشروط الأربعة السابقة و بحيث من اجل a عدد حقيقي معطى ومن أجل كل عدد حقيقي x كيفي $f(x+a)=f(x)\times f(a)$.

الدالة $x\mapsto f(x+a)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مركب دالتين ، والدالة $x\mapsto f(x)f(a)$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

إذن $f'(x+a)=f(a)\times f'(x)$

من اجل $x=0$ لدينا $f'(a)=f(a)f'(0)$ و بما ان $f'(0)=1$ فإن $f'(a)=f(a)$ من أجل كل a

إذن الدالة f حل للمعادلة $f'=f$.

بالإضافة إلى ذلك $f(a+0)=f(a)\times f(0)$ اي $f(a)=f(a)\times f(0)$

لكن $f(a)$ غير معدوم إذن $f(0)=1$

و عليه f هي حل للمعادلة $f'=f$ و $f(0)=1$ و هذا يعني ان f هي الدالة الأسية.

تمرين تدريبي 1

f ، g ، h دوال معرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x)=\exp(x)+2x$ ، $g(x)=\exp(x-1)$ و $h(x)=\exp(-2x)$

أ) عين اتجاه تغير كل دالة.

ب) اوجد علاقة بين g و g' و أيضا بين h و h'.

الحل ✓

أ) - الدالة f هي مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما $x\mapsto\exp x$ و $x\mapsto 2x$ و لدينا $f'(x)=\exp x+2$.

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $\exp x>0$ ومنه $f'(x)>0$ اي ان الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

• $g(x)=\exp(x)\times\exp(-1)$

الدالة g هي جداء الدالة exp بعدد حقيقي موجب $\exp(-1)$ ومنه

$g'(x)=\exp'(x)\exp(-1)=\exp(x-1)$ إذن $g'(x)>0$ و منه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

• $h(x)=(\exp(-x))^2=\left(\frac{1}{\exp(x)}\right)^2$ إذن الدالة h من الشكل $\left(\frac{1}{u}\right)^2$ حيث $u(x)=\exp(x)$

$$h'(x)=\frac{-2\exp(x)}{(\exp(x))^3}=\frac{-2}{(\exp(x))^2}=-2\exp(-2x)$$

لكن $\exp(-2x)>0$ إذن $h'(x)<0$ و منه نستنتج ان h متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

ب) $g'(x)=\exp(x-1)=g(x)$ و $h'(x)=-2\exp(-2x)=-2h(x)$

تمرين تدريبي 2

1) بسط العبارات التالية :

$A=(\exp(x))^3$ ، $B=\exp(3-2x)\times\exp(5x-7)$ ، $C=\dfrac{\exp(3x-1)}{\exp(-3x)}$.

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $\dfrac{\exp x}{\exp x-x}=\dfrac{1}{1-x\exp(-x)}$

و $\dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}=\dfrac{1-\exp(-2x)}{1+\exp(-2x)}$

✓ الحل

1)
$$A=(\exp(x))^3=\exp(x)\times\exp(x)\times\exp(x)=\exp(2x)\times\exp(x)=\exp(3x)$$
$$B=\exp(3-2x)\times\exp(5x-7)=\exp(3-2x+5x-7)=\exp(-4+3x)$$
$$C=\frac{\exp(3x-1)}{\exp(-3x)}=\frac{\exp(3x-1)}{(\exp(3x))^{-1}}=\exp(3x-1)\times\exp(3x)=\exp(3x-1+3x)$$
$$=\exp(6x-1)$$

ب)
$$\frac{\exp(x)}{\exp(x)-x}=\frac{\exp(x)}{\exp(x)[1-x\exp(-x)]}=\frac{1}{1-x\exp(-x)}$$
$$\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}=\frac{\exp(x)\left[1-\dfrac{\exp(-x)}{\exp(x)}\right]}{\exp(x)\left[1+\dfrac{\exp(-x)}{\exp(x)}\right]}=\frac{1-(\exp(-x))^2}{1+(\exp(-x))^2}=\frac{1-\exp(-2x)}{1+\exp(-2x)}$$

4. الترميز e^x

صورة الواحد بالدالة الأسية نرمز له بـ e اي $\exp(1)=e$.

العدد e هو عدد حقيقي و القيمة التقريبية له هي $2,71828$

الخواص المبرهنة في الفقرة السابقة تسمح لنا بكتابة $\exp(n)=\exp(n\times1)=(\exp(1))^n=e^n$

من أجل كل عدد صحيح n.

نرمز بـ e^x إلى صورة العدد الحقيقي x بالدالة الأسية و تكتب $\exp(x)=e^x$

ملاحظة

العدد e عدد غير ناطق.

خواص

خواص الدالة الأسية المبرهنة في الفقرة السابقة تكتب بالترميز الجديد كمايلي :

1) الدالة $x\mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة هي نفسها

2) $e^0=1$ و من أجل كل عدد حقيقي x يكون $e^x>0$.

3) مهما يكن العددان الحقيقيان a و b و العدد الصحيح n :

$$e^{a+b}=e^a\times e^b \ ،\ e^{-a}=\frac{1}{e^a} \ ،\ e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b} \ ،\ (e^a)^n=e^{na}$$

4) من أجل كل الأعداد الحقيقية a_1 ، a_2 ، .... ، a_p حيث p عدد طبيعي لدينا

$$e^{a_1}e^{a_2}\times\ldots\times e^{a_p}=e^{a_1+a_2+\ldots+a_p}$$

تمرين تدريبي 1

بسط العبارات التالية :

$A=e^{-3}\times(e^2)^4$ ، $B=(e^{-x})\times(e^x)^3$

$C=e^{2x}\times e^{-2x}$ ، $D=\dfrac{e^{-x}}{e^x+1}-\dfrac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}$

✓ الحل

$$A=e^{-3}\times e^8=e^{-3+8}=e^5$$
$$B=e^{-x}\times(e^x)^3=e^{-x}\times e^{3x}=e^{-x+3x}=e^{2x}$$
$$C=e^{2x}\times e^{-2x}=e^{2x-2x}=e^0=1$$
$$D=\frac{e^{-x}}{e^x+1}-\frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}=\frac{e^x e^{-x}}{e^{2x}+e^x}-\frac{e^{-2x}e^{2x}}{e^{2x}+e^{-x}e^{2x}}$$
$$=\frac{e^0}{e^{2x}+e^x}-\frac{e^0}{e^{2x}+e^x}=\frac{1}{e^{2x}+e^x}-\frac{1}{e^{2x}+e^x}=0$$

5. دراسة الدالة الأسية

1.5 اتجاه التغير والنهايات

مبرهنة

1) الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

2) إذا كان $x>0$ فإن $e^x>1$ و إذا كان $x<0$ فإن $e^x<1$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$

4) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ و من اجل h قريب من الصفر $e^h\approx 1+h$

الإثبات

1) من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $\exp'(x)=\exp(x)$ و $\exp(x)\rangle 0$

إذن الدالة الأسية متزايدة على $\mathbb{R}$

2) بما ان الدالة الأسية متزايدة تماما ومستمرة على المجال $[0,+\infty[$ و $\exp(0)=1$

فإنه من اجل كل $x\rangle 0$ يكون $\exp(x)\rangle 1$

- بما أن الدالة الأسية متزايدة تماما ومستمرة على $]-\infty,0]$ و $\exp(0)=1$

فإنه من اجل كل $x\langle 0$ يكون $\exp(x)\langle 1$

3) لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x)=e^x-x$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=e^x-1$ و $f'(0)=0$

- على المجال $]-\infty,0[$ لدينا $f'(x)\langle 0$ و منه f متناقصة تماما على مجال $]-\infty,0[$.

- على المجال $]0,+\infty[$ لدينا $f'(x)\rangle 0$ و منه f متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

و بما ان $f(0)=1$ فإن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى تساوي 1 .

إذن من اجل كل عدد حقيقي x يكون $f(x)\geq 1$

و منه نستنتج ان $f(x)\rangle 0$ على $\mathbb{R}$ و هذا يعني ان $x\rangle e^x$.

و بما ان $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ (حسب نظرية الحصر)

- نضع $X=-x$ و بالتالي لما x يؤول إلى $(-\infty)$ فإن X يؤول إلى $(+\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=\lim_{X\to+\infty} e^{-X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{1}{e^X}=0$$

4) - الدالة $x\mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق عند الصفر وعددها المشتق عند الصفر هو 1

و منه نستنتج بالتعريف أن $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$

- من النهاية السابقة نستنتج ان في جوار الصفر $e^h=1+h+\phi(h)$ حيث $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$

إذن $e^h\approx 1+h$ بجوار الصفر.

تمرين تدريبي 1

لتكن f و g دالتين معرفتين ب $f(x)=\frac{e^x-3}{e^x+1}$ ، $g(x)=\frac{e^x-1}{x^3}$

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ثم احسب $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

✓ الحل

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{3}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}=1$$

لان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-3$ لان $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{x^2}=+\infty$$

لان $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

تمرين تدريبي 2

1) باستعمال التقريب التالفي لـ e^x برهن انه عندما يكون العدد الطبيعي n كبيرا بالقدر الكافي يكون $e\approx\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

2) لتكن (U_n) متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ب $U_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ احسب بقريب 10^{-10} الحدود U_{100} ، U_{1000} ثم قارنها مع e .

✓ الحل

1) بجوار الصفر لدينا $e^h\approx h+1$

و بوضع $h=\frac{1}{n}$ مع n كبير بالقدر الكافي نجد $e^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}$

و برفع الطرفين إلى القوة n نجد $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ اي $e\approx\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

2) $U_{100}=\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}=2,7048138294$

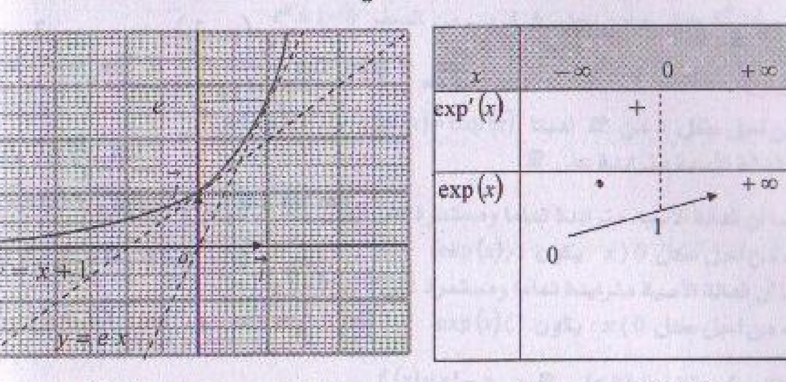
$$U_{1000}=\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}=2,7169239325$$

نلاحظ أن U_{100} و U_{1000} قيم مقربة إلى 10^{-10} للعدد e

و كلما كان n كبيرا جدا كلما اقتربنا من العدد e

و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=e$

2.5 جدول تغيرات و المنحنى البياني للدالة الأسية



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$	+		
$\exp(x)$	0 ↗	1	↗ $+\infty$

- المنحني الممثل للدالة exp يقبل المستقيم ذا المعادلة $y=0$ مقارب له بجوار $(-\infty)$
- المماسان لمنحني الدالة exp عند 1 و 0 معادلتاهما على الترتيب $y=ex$ و $y=x+1$
- بما أن $x \rangle e^x$ من أجل كل x فإن المنحني الممثل للدالة exp يقع فوق المستقيم ذي المعادلة $y=x$

3.5 الوضع النسبي لبيان الدالة exp و مماساته

نسمي (γ) المنحني البياني للدالة exp في معلم متعامد ومتجانس، و ليكن a عدد حقيقي و لتكن $M(a\,,e^a)$ نقطة من (γ).

معادلة المماس (T) للمنحني (γ) عند M هي $y=e^a+e^a(x-a)$.

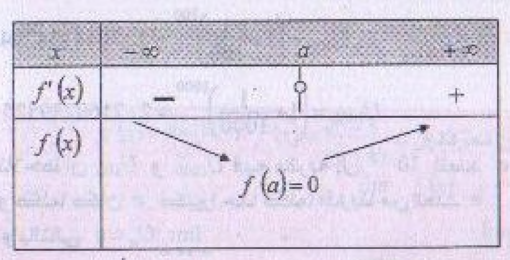
لدراسة الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (T) ندرس إشارة المقدار $e^x-\left[e^a+e^a(x-a)\right]$.

نضع $f(x)=e^x-\left[e^a+e^a(x-a)\right]$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما ؛ $x\mapsto e^x$ و $x\mapsto -\left[e^a+e^a(x-a)\right]$ و لدينا $f'(x)=e^x-e^a$

بما أن الدالة exp متزايدة تماما فإن

- إذا كان $x \rangle a$ يكون $e^x \rangle e^a$ و عليه $f'(x)\rangle 0$
- إذا كان $x \langle a$ يكون $e^x \langle e^a$ و عليه $f'(x)\langle 0$



x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	↘	$f(a)=0$	↗

- من جدول تغيرات f نلاحظ أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)\geq 0$ وهذا يعني أن المنحني للدالة exp يقع فوق المماس (T) و يمسه في النقطة الوحيدة $M(a,e^a)$.

4.5 نهايات شهيرة

مبرهنة

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} x\,e^x=\overline{0}$$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=0$

الإثبات

لتكن f دالة معرفة على $[0\,,+\infty[$ بـ $f(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$.

f و f' قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=e^x-x$ و $f''(x)=e^x-1$.

من أجل كل x من $[0\,,+\infty[$ لدينا $f''(x)\geq 0$ و منه الدالة f' متزايدة تماما على $[0\,,+\infty[$.

بما أن $f'(0)=1$ فإن $f'(x)\rangle 0$ و عليه فإن الدالة f متزايدة تماما على $[0\,,+\infty[$

و بما أن $f(0)=1$ فإن $f(x)\geq 1\rangle 0$.

$f(x)\rangle 0$ يكافئ $e^x \rangle \frac{x^2}{2}$ بالقسمة على العدد الحقيقي الموجب تماما x نجد $\frac{e^x}{x}\rangle\frac{x}{2}$

و بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$ فإن حسب نظرية الحصر نجد $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

- بوضع $X=-x$ يكون $x\,e^x=-X\,e^{-X}=\frac{-X}{e^X}=\frac{-1}{\left(\frac{e^X}{X}\right)}$

$$\lim_{x\to-\infty} x\,e^x=\lim_{X\to+\infty}\frac{-1}{\left(\frac{e^X}{X}\right)}=\overline{0} \quad \text{لأن} \quad \lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$$

ملاحظة

من أجل قيم كبرى لـ x ، فالعددان x و e^x يأخذان قيما كبرى جدا و بما أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ فإن e^x أكبر بكثير عن x نقول أن الدالة الأسية تتفوق عن الدالة $x\mapsto x$.

تمرين تدريبي 1

1) f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^x-2x+1$ و $g(x)=\frac{3e^x-2}{e^x+2}$
احسب نهايات f و g عند $+\infty$ و $-\infty$

2) h و κ دالتان معرفتان كما يلي $h(x)=\frac{x+2}{3e^x-1}$ و $\kappa(x)=\frac{e^{x-1}-1}{x-1}$

أ) احسب نهاية h عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

ب) احسب نهاية κ عند $(+\infty)$ ، $(-\infty)$ و 1

✓ الحل

(1 $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(3-\frac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{2}{e^x}}{1+\frac{2}{e^x}} = 3$ لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3e^x-2}{e^x+2} = -\frac{2}{2} = -1$ لأن $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

• $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(e^x - 2x + 1\right) = +\infty$ ، لأن $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ و

$\lim_{x\to-\infty} (-2x+1) = +\infty$

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(1 - \frac{-2}{\left(\frac{e^x}{x}\right)} + \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\left(\frac{e^x}{x}\right)} = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

(2 (أ $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{3e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{e^x\left(3-\frac{1}{e^x}\right)} = 0$

لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

• $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{3e^x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{3e^x-1} = +\infty$

لأن $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} \left(3e^x-1\right) = -1$

ب) $\lim_{x\to+\infty} \kappa(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} = \lim_{X\to+\infty} \frac{e^X-1}{X}$

• $\lim_{x\to-\infty} \kappa(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(e^{x-1}-1\right) \times \frac{1}{x-1} = 0$

لأن $\lim_{x\to-\infty} \left(e^{x-1}-1\right) = -1$ و $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-1} = 0$

$\lim_{x\to1} \kappa(x) = \lim_{X\to0} \frac{e^X-1}{X} = 1$ حيث $X = x-1$

تمرين تدريبي ❷

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^x - x - 2$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(o, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) ادرس تغيرات الدالة f.

2) بين ان المعادلة $f(x) = 0$ لها حلان في $\mathbb{R}$. ثم ارسم (γ).

✓ الحل

(1 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} (-x-2) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim e^x\left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right) = +\infty$

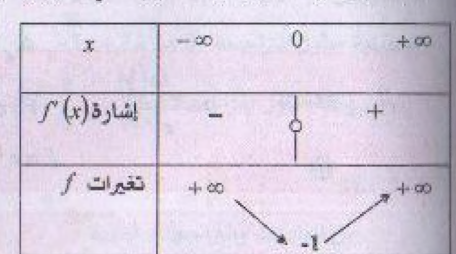
لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

• f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x) = e^x - 1$.

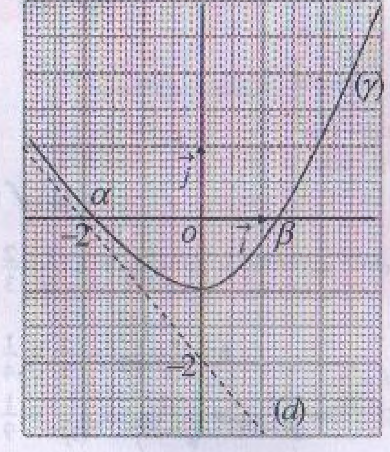
$f'(x) = 0$ يكافئ $x = 0$.

- إذا كان $x \rangle 0$ فإن $e^x \rangle 1$ و بالتالي $f'(x) \rangle 0$ اي f متزايدة تماما على $[0, +\infty[$.

- إذا كان $x \langle 0$ فإن $e^x \langle 1$ و بالتالي $f'(x) \langle 0$ اي f متناقصة تماما على $]-\infty, 0]$



x	$-\infty$ 0 $+\infty$
إشارة $f'(x)$	− 0 +
تغيرات f	$+\infty$ ↘ -1 ↗ $+\infty$



(2 . بما ان $f' \langle 0$ على المجال $]-\infty, 0[$

و $0 \in]-1, +\infty[$ فإن المعادلة $f(x) = 0$

لها حل وحيد α من $]-\infty, 0[$

- بما ان $f' \rangle 0$ على المجال $]0, +\infty[$

و $0 \in]-1, +\infty[$ فإن للمعادلة $f(x) = 0$

لها حلا وحيدا β من $]0, +\infty[$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β على $\mathbb{R}$

بما ان $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-x-2) = 0$ فإن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = -x - 2$ مقارب لـ (γ) بجوار $-\infty$

5.5 المعادلات والمتراجحات

خاصية

1) مهما يكن العدد الحقيقي الموجب تماما m فالمعادلة $e^x = m$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ ونرمز له بـ $Ln(m)$ ونكتب $x = Ln(m)$

2) من أجل كل عددين حقيقين a و b :

$e^a = e^b$ يكافئ $a = b$ و $e^a < e^b$ يكافئ $a < b$

الإثبات

1) الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$ و بالإضافة إلى كونها متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإنها تقابل من $\mathbb{R}$ في $]0, +\infty[$.

إذن من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما m فالمعادلة ذات المجهول x التالية $e^x = m$ تقبل حلا وحيدا الذي نرمز له بـ $Ln(m)$.

2) بما أن الدالة الأسية تقابل من $\mathbb{R}$ في $]0, +\infty[$ ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ فإن

$e^a = e^b$ يكافئ $a = b$ و $e^a < e^b$ يكافئ $a < b$.

ملاحظة

بما أن للمعادلة $e^x = m$ تقبل حلا وحيدا هو $Ln(m)$ فإنه يمكن كتابة $e^{Ln(m)} = m$.

تمرين تدريبي 1

بسط الأعداد التالية ، $A = e^{Ln(2) - Ln(3)}$ ، $B = \dfrac{e^{Ln\left(\frac{1}{2}\right)}}{e^{Ln(2)}}$ ، $C = e^{-2Ln(3)}$

$D = e^{2Ln(5)}$ ، $E = e^{Ln(3) - 2Ln(2)}$

✓ الحل

$$A = e^{Ln(2)} \times e^{-Ln(3)} = 2 \times \frac{1}{e^{Ln(3)}} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$B = \frac{e^{Ln\left(\frac{1}{2}\right)}}{e^{Ln(2)}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$C = e^{-2Ln(3)} = \frac{1}{e^{2Ln(3)}} = \frac{1}{\left(e^{Ln(3)}\right)^2} = \frac{1}{(3)^2} = \frac{1}{9}$$

$$D = e^{2Ln(5)} = \left(e^{Ln(5)}\right)^2 = 5^2 = 25$$

$$E = e^{Ln(3) - 2Ln(2)} = e^{Ln(3)} \times \frac{1}{e^{2Ln(2)}} = 3 \times \left(\frac{1}{e^{Ln(2)}}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

تمرين تدريبي 2

حل المعادلات والمتراجحات التالية

أ) $e^{x^2+3x} = e^4$ ، ب) $e^{2x+1} < e^{x^2-x-3}$ ، جـ) $e^{-3x+2} \geq 3$

✓ الحل

- المعادلتان $e^{U(x)} = e^{V(x)}$ و $U(x) = V(x)$ لهما نفس مجموعة الحلول
- المتراجحتان $e^{U(x)} < e^{V(x)}$ و $U(x) < V(x)$ لهما نفس مجموعة الحلول

أ) المعادلتان $e^{x^2+3x} = e^4$ و $x^2+3x = 4$ لهما نفس مجموعة الحلول.

المعادلة $x^2+3x = 4$ تكافئ المعادلة $x^2+3x-4 = 0$ التي حلاها هما $x_1 = 1$ و $x_2 = -4$

إذن مجموعة حلول المعادلة $e^{x^2+3x} = e^4$ هي $S = \{1, -4\}$.

ب) المتراجحتان $e^{2x+1} < e^{x^2-x-3}$ و $2x+1 < x^2-x-3$ لهما نفس مجموعة الحلول.

المتراجحة $2x+1 < x^2-x-3$ تكافئ المتراجحة $x^2-3x-4 > 0$

و هذه الأخيرة مجموعة حلولها هي $]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

جـ) بما أن $e^{Ln3} = 3$ فإن المتراجحة (جـ) تكتب على الشكل $e^{-3x+2} \geq e^{Ln3}$

المتراجحتان $e^{-3x+2} \geq e^{Ln3}$ و $-3x+2 \geq Ln3$ لهما نفس مجموعة الحلول.

مجموعة حلول المتراجحة $-3x+2 \geq Ln3$ هي $\left]-\infty, \dfrac{2-Ln3}{3}\right[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي $S = \left]-\infty, \dfrac{2-Ln3}{3}\right[$

تمرين تدريبي 3

حل المعادلات والمتراجحات التالية

أ) $e^{2x} = \left(e^{-x}\right)^2 \times e^{-3}$ ، ب) $e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$ ، جـ) $e^{-x} - 3 \geq 0$

✓ الحل

لحل معادلة من الشكل $a e^{2x} + b e^x + c = 0$ نضع $e^x = X$

الحلول (في حالة وجودها) هي الأعداد x_0 بحيث $x_0 = Ln(X_0)$ حيث X_0 هو الحل الموجب للمعادلة $a X^2 + b X + c = 0$

أ) $\left(e^{-x}\right)^2 \times e^{-3} = e^{-2x} \times e^{-3} = e^{-2x-3}$

و منه المعادلة (أ) تكتب على الشكل $e^{2x} = e^{-2x-3}$

و هذه الأخيرة تكافئ $2x=-2x-3$

مجموعة حلول المعادلة $2x=-2x-3$ هي $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$

و منه مجموعة حلول المعادلة أ) هي $S=\left\{-\frac{3}{4}\right\}$

ب) بوضع $X=e^x$ المعادلة ب) تكتب على الشكل $X^2-3X-4=0$ ...(I)

حلا للمعادلة (I) هما $X_0=4$ و $X_1=-1$

$X_1=-1$ مرفوض و $X_0=4$ مقبول

$X_0=e^{x_0}$ يكافئ $x_0=Ln(X_0)=Ln\,4$

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي $S=\{Ln\,4\}$.

ج) $e^{-x}-3\geq 0$ يكافئ $e^{-x}\geq e^{Ln\,3}$ يكافئ $-x\geq Ln\,3$ يكافئ $x\leq -Ln\,3$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ج) هي $S=]-\infty\,,-Ln\,3]$

6. الدالة المركبة $x\mapsto e^{u(x)}$

دراسة هذا النوع من الدوال تعتمد على مبرهنة نهاية دالة مركبة واشتقاق دالة مركبة.

الدالة exp معرفة على $\mathbb{R}$ و بالتالي مجموعة تعريف الدالة $\exp o u$ هي مجموعة تعريف الدالة u

مبرهنة

1) إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الدالة f المعرفة بـ $f(x)=(\exp o u)(x)=e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$

2) اتجاه تغير الدالة $x\mapsto e^{u(x)}$ هو نفس إتجاه تغير الدالة u

الإثبات

1) $f'(x)=(\exp o u)'(x)=u'(x)\times\exp'(u(x))$

لكن $\exp'(u(x))=e^{u(x)}$ و عليه $f'(x)=u'(x)\times e^{u(x)}$

2) بما أن $e^{u(x)}>0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $u'(x)$

و عليه فإن اتجاه تغير الدالة $x\mapsto e^{u(x)}$ هو نفس إتجاه تغير الدالة $x\mapsto u(x)$

مثال 1

عين المجال الذي تكون فيه الدالة f قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $f(x)=e^{2x+3}$ ، ب) $f(x)=e^{2x^2+x}$ ، ج) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

د) $f(x)=e^{\sin x}$ ، هـ) $f(x)=e^{\frac{x}{x^2+1}}$

الحل

أ) الدالة $x\xrightarrow{u}2x+3$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=2\times e^{2x+3}$

ب) الدالة $x\xrightarrow{u}2x^2+x$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=(4x+1)e^{2x^2+x}$

ج) الدالة $x\xrightarrow{u}\frac{1}{x}$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{0\}$ و لدينا $f'(x)=\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

د) الدالة $x\xrightarrow{u}\sin(x)$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=(\cos x)e^{\sin x}$

هـ) الدالة $x\mapsto\frac{x}{x^2+1}$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}e^{\frac{x}{x^2+1}}$

تمرين تدريبي 1

احسب نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ في كل حالة من الحالات التالية.

1) $f(x)=e^{2x+3}$ ، 2) $f(x)=e^{\frac{2x+1}{x-2}}$

3) $f(x)=e^{-x^2}$ ، 4) $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$

الحل

1) نهاية الدالة $x\xrightarrow{u}2x+3$ عند $(+\infty)$ هي $(+\infty)$

ونهاية الدالة $x\mapsto e^x$ عند $(+\infty)$ هي $(+\infty)$ و بالتالي $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) نهاية الدالة $x\xrightarrow{u}\frac{2x+1}{x-2}$ عند $(+\infty)$ هي 2

و نهاية الدالة $x\mapsto e^x$ عند 2 هي e^2 و منه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=e^2$

3) نهاية الدالة $x\xrightarrow{u}-x^2$ عند $(+\infty)$ هي $(-\infty)$

ونهاية الدالة $x\mapsto e^x$ لما x يؤول $(-\infty)$ هي 0 و منه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

4) $\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$ و $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ منه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

تمرين تدريبي 2

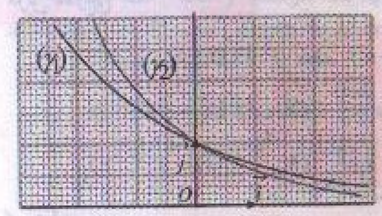
لتكن f_k و g_k دالتين معرفتين كما يلي $f_k(x)=e^{-kx}$ و $g_k(x)=e^{-kx^2}$
مع $k>0$ ، (γ_k) و (Γ_k) المنحنيين الممثلين لـ f_k و g_k على الترتيب في معلم متعامد و متجانس.

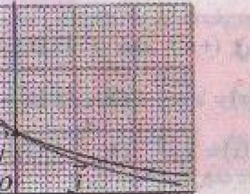
1) أ) ادرس تغيرات الدالة f_k
ب) ادرس الوضع النسبي لـ (γ_1) و (γ_2) ثم ارسم (γ_1) و (γ_2)
2) أ) ادرس تغيرات الدالة g_k
ب) ادرس الوضع النسبي لـ (Γ_1) و (Γ_2) ثم ارسم (Γ_1) و (Γ_2)

✓ الحل

1) أ) الدالة $x \mapsto -kx$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي الدالة f_k معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'_k(x)=(-k)e^{-kx}$
بما أن $k>0$ فإن من اجل كل عدد حقيقي x يكون $f'_k(x)<0$ اي ان f_k متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
إشارة f'_k	−	
تغيرات f_k	$+\infty$ ↘	0





بما أن $\lim_{x\to+\infty}(-kx)=-\infty$ فإن $\lim_{x\to+\infty}e^{-kx}=0$
بما أن $\lim_{x\to-\infty}(-kx)=+\infty$ فإن $\lim_{x\to-\infty}(e^{-kx})=+\infty$

ب) لدراسة الوضع النسبي لـ (γ_1) و (γ_2) ندرس إشارة الفرق $f_2(x)-f_1(x)$.
$$f_2(x)-f_1(x)=e^{-2x}-e^{-x}=e^{-x}(e^{-x}-1)=e^{-x}\left(\frac{1-e^{x}}{e^{x}}\right)$$
$f_2(x)-f_1(x)=0$ يكافئ $1-e^x=0$ يكافئ $x=0$
- إذا كان $x>0$ فإن $f_2(x)-f_1(x)<0$ و بالتالي (γ_2) تقع تحت (γ_1)
- إذا كان $x<0$ فإن $f_2(x)-f_1(x)>0$ وبالتالي (γ_2) تقع تحت (γ_1)

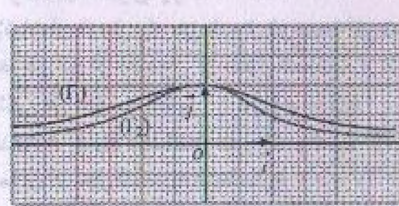
المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب للمنحني (γ_k) في جوار $(-\infty)$

2) دراسة تغيرات الدالة g_k

الدالة $x \mapsto -kx^2$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
اذن الدالة g_k معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
و لدينا $g'_k(x)=-2kxe^{-kx^2}$
$g'_k(x)=0$ يكافئ $x=0$
- إذا كان $x>0$ فإن $g'_k(x)<0$ و بالتالي g_k متناقصة تماما على $]0,+\infty[$
- إذا كان $x<0$ فإن $g'_k(x)>0$ و بالتالي g_k متزايدة تماما على $]0,+\infty[$.

$\lim_{x\to-\infty}(-kx^2)=\lim_{x\to+\infty}(-kx^2)=-\infty$
و بالتالي $\lim_{x\to-\infty}g_k(x)=\lim_{x\to+\infty}g_k(x)=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $g'_k(x)$	+	0	−
تغيرات g_k	0 ↗	1	↘ 0



ب) لدراسة الوضع النسبي لـ (Γ_1) و (Γ_2) ندرس إشارة المقدار $g_2(x)-g_1(x)$
$$g_2(x)-g_1(x)=e^{-2x^2}-e^{-x^2}=e^{-x^2}\left(\frac{1-e^{x^2}}{e^{x^2}}\right)$$
$g_2(x)-g_1(x)=0$ يكافئ $x=0$
من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا $x^2>0$
وبما أن الدالة exp متزايدة تماما على $]0,+\infty[$
فإن $e^{x^2}>e^0$ اي $e^{x^2}>1$
إذن $g_2(x)-g_1(x)<0$ و هذا يعني أن (Γ_2) يقع تحت (Γ_1)
- المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب لـ (Γ_1) و (Γ_2) في جوار $+\infty$ و $-\infty$
- الدالة g_k زوجية وبالتالي منحناها يقبل المستقيم $(x=0)$ كمحور تناظر له

7- المعادلات التفاضلية

نسمي معادلة تفاضلية كل معادلة تربط بين دالة ومشتقاتها.
حل معادلة تفاضلية على مجال I يعني إيجاد كل الدوال f القابلة للاشتقاق على I و التي تحقق المعادلة المعطاة.
في هذه الفقرة نتطرق فقط إلى المعادلات التفاضلية من الشكل:
$y'=ay+b$ حيث a و b عددان حقيقيان و $a\neq0$

1.7 حل المعادلة التفاضلية $y'=ay$ مع $a\neq 0$.

مبرهنة ❶

حلول المعادلة التفاضلية $y'=ay$ مع $a\neq 0$ على $\mathbb{R}$ هي دوال f_k المعرفة بـ $f_k(x)=k\,e^{ax}$ حيث k عدد حقيقي كيفي.

الإثبات

من اجل كل عدد حقيقي k لدينا $f_k'(x)=a\,k\,e^{ax}$

إذن $f_k'(x)=a f_k(x)$ و هذا يعني أن f_k حل للمعادلة التفاضلية $y'=ay$.

• وحدانية الدوال f_k :

لإثبات أن الدوال f_k هي الدوال الوحيدة التي تحقق $y'=ay$

نفرض أنه توجد دوال g حلول للمعادلة $y'=ay$ و نبين أن g من الشكل f_k.

لتكن h دالة معرفة بـ $h(x)=g(x)e^{-ax}$

الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $h'(x)=e^{-ax}\left(g'(x)-a\,g(x)\right)$

بما أن g حل للمعادلة التفاضلية $y'=ay$ فإن $g'(x)-a\,g(x)=0$

و عليه نجد $h'(x)=0$

إذن الدالة h ثابتة

وهذا يعني من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $h(x)=k$

إذن $g(x)=k\,e^{ax}$

مبرهنة ❷

من اجل كل ثنائية $(x_0\,,y_0)$ المعادلة $y'=ay$ تقبل حلا وحيدا f بحيث $f(x_0)=y_0$

الإثبات

القول أن $f_k(x_0)=y_0$ يكافئ القول أن $k\,e^{a x_0}=y_0$

إذن لا توجد إلا قيمة وحيدة ممكنة لـ k هي $y_0\,e^{-a x_0}$

و الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=y_0\,e^{a(x-x_0)}$

مثال . ◆

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية $y'=-3y$ مع $(x_0\,,y_0)=(1\,,3)$

✓ الحل

حل المعادلة التفاضلية المعطاة هي الدالة f المعرفة من اجل كل x بالعبارة $f(x)=y_0\,e^{a(x-x_0)}$ و بتعويض a و x_0 و y_0 نجد $f(x)=3\,e^{-3(x-1)}$

2.7 حل المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ مع $ab\neq 0$

مبرهنة

الحلول في $\mathbb{R}$ للمعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ مع $ab\neq 0$ هي الدوال f_k المعرفة من اجل كل x من $\mathbb{R}$ بـ $f_k(x)=k\,e^{ax}-\frac{b}{a}$ حيث k عدد حقيقي كيفي.

الإثبات

نفرض أن الدالة f القابلة للاشتقاق على I هي حلا للمعادلة $y'=ay+b$ عندئذ نضع من اجل كل x من $\mathbb{R}$ نضع $g(x)=f(x)+\frac{b}{a}$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x)=f'(x)$

لكن $f'(x)=a\,f(x)+b=a\,g(x)$

إذن $g'(x)=a\,g(x)$ و هذا ما يثبت أن g هي حل للمعادلة التفاضلية $y'=ay$

إذن g هي الدالة $x\mapsto k\,e^{ax}$ حيث k عدد حقيقي كيفي.

بالعكس كل دالة f من الشكل $x\mapsto k\,e^{ax}-\frac{b}{a}$ هي حل للمعادلة $y'=ay+b$ لأنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=k\,a\,e^{ax}$ و $f'(x)=a\,f(x)+b$.

و عليه حلول المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ هي الدوال f_k المعرفة بـ $f_k(x)=k\,e^{ax}-\frac{b}{a}$

ملاحظة

المعادلة التفاضلية من الشكل $y'=ay+b$ مع $a\neq 0$ تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ذات معاملات a و b ثابتة.

تمرين تدريبي

أوجد الدالة f حلا للمعادلة التفاضلية $y+y'=1\ldots(E)$ بحيث $f(0)=2$

✓ الحل

المعادلة التفاضلية (E) تكتب على الشكل $y'=-y+1$

الحل العام لهذه الأخيرة هي الدوال f_k المعرفة من اجل كل x من $\mathbb{R}$ بـ $f_k(x)=k\,e^{-x}+1$

$f_k(0)=2$ يكافئ $k+1=2$ يكافئ $k=1$

منه الدالة f المطلوبة معرفة كما يلي $f(x)=e^{-x}+1$



تطبيقات نموذجية

تطبيق 1 — تبسيط عبارة

1) بسط العبارات التالية : $A=(\exp(x))^4$ ، $B=\dfrac{\exp(7x-3)}{\exp(-7x)}$ ،

$C=\dfrac{\exp(2x)\times\exp(x)}{\exp(5x+1)}$

2) تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x يكون $\dfrac{\exp(x)-3}{\exp(x)+3}=1-\dfrac{6}{\exp(x)+3}$

✓ الحل

1) $$A=(\exp(x))^4=(\exp(x))^2\times(\exp(x))^2=\exp(2x)\times\exp(2x)=\exp(4x)$$

$$B=\frac{\exp(7x-3)}{\exp(-7x)}=\frac{\exp(7x-3)}{(\exp(7x))^{-1}}=\exp(7x-3)\exp(7x)$$

$$=\exp(7x-3+7x)=\exp(14x-3)$$

$$C=\frac{\exp(2x)\exp(x)}{\exp(5x+1)}=\frac{\exp(3x)}{\exp(5x+1)}=\exp(3x)\times\exp(-5x-1)=\exp(-2x-1)$$

2) $$\frac{\exp(x)-3}{\exp(x)+3}=\frac{\exp(x)+3-6}{\exp(x)+3}=1-\frac{6}{\exp(x)+3}$$

تطبيق 2 — تبسيط الأعداد

بسط الأعداد التالية $A=e^{-Ln(2)}+e^{Ln(3)}$ ، $B=\dfrac{2}{e^{-1+3Ln(2)}}$ ، $C=\dfrac{e^{3x}}{(e^x)^3}$

✓ الحل

$$A=\frac{1}{e^{Ln(2)}}+3=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}$$

$$B=\frac{2}{e^{-1+3Ln(2)}}=\frac{2}{e^{-1}\times e^{3Ln(2)}}=\frac{2}{e^{-1}\times(e^{Ln(2)})^3}=\frac{2}{e^{-1}\times 2^3}=\frac{e}{4}$$

$$C=\frac{e^{3x}}{(e^x)^3}=\frac{e^{3x}}{e^{3x}}=e^{3x-3x}=e^0=1$$

تطبيق 3 — مركز تناظر لبيان دالة

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$

1) بين أن $f(-x)+f(x)=2$ ماذا تستنتج ؟

2) تحقق من ان $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}-1$

✓ الحل

1) $$f(-x)+f(x)=\frac{3e^{-x}-1}{e^{-x}+1}+\frac{3e^x-1}{e^x+1}=\frac{\frac{3}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}+\frac{3e^x-1}{e^x+1}$$

$$=\frac{3-e^x}{1+e^x}+\frac{3e^x-1}{e^x+1}=\frac{3-e^x+3e^x-1}{1+e^x}=\frac{2+2e^x}{1+e^x}=2$$

منه نستنتج النقطة $A(0,1)$ مركز تناظر لبيان f

2) $$f(x)=\frac{3e^x-1}{e^{-x}+1}=\frac{4e^x-(e^x+1)}{e^x+1}=\frac{4e^x}{e^x+1}-1$$

تطبيق 4 — كيفية التحقق من صحة مساواة

تحقق من صحة المساواة المعطاة من أجل كل x في كل حالة من الحالات التالية ،

1) $\dfrac{e^x}{2+e^x}=\dfrac{1}{2e^{-x}+1}$

2) $\dfrac{e^x}{e^x-x}=\dfrac{1}{1-xe^{-x}}$

3) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

4) $\dfrac{e^x-2}{e^x+1}=1-\dfrac{3}{e^x+1}$

✓ الحل

1) $$\frac{e^x}{2+e^x}=\frac{e^x}{e^x\left(\frac{2}{e^x}+1\right)}=\frac{1}{2e^{-x}+1}$$

2) $$\frac{e^x}{e^x-x}=\frac{e^x}{e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)}=\frac{1}{1-xe^{-x}}$$

3) $$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})}=\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

4) $$\frac{e^x-2}{e^x+1}=\frac{e^x+1-3}{e^x+1}=\frac{e^x+1}{e^x+1}-\frac{3}{e^x+1}=1-\frac{3}{e^x+1}$$

تطبيق 5 — تعيين مجموعة حلول معادلة

حل المعادلات التالية :

أ) $e^{3x}=1$ ، ب) $e^{-\frac{1}{x}}=e^{x+2}$ ، جـ) $2e^{-2x}=\frac{1}{e^{2x}-2}$

د) $\left(e^{-x}-5\right)\left(e^{2x}-e\right)=0$ ، هـ) $\frac{e^{-x}}{1+2e^{-x}}=3$

✓ الحل

أ) $e^{3x}=1$ تكافئ $e^{3x}=e^{0}$ تكافئ $3x=0$ تكافئ $x=0$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (أ) هي $S=\{0\}$

ب) مجموع تعريف المعادلة (ب) هي $\mathbb{R}-\{0\}$

مجموعة حلول المعادلة $e^{-\frac{1}{x}}=e^{x+2}$ هي نفسها مجموعة حلول المعادلة $-\frac{1}{x}=x+2$

و هذه الأخيرة تكتب على الشكل $x^2+2x+1=0$ و حلها هو $x=-1$

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي $S=\{-1\}$

جـ) المجموعة التي تكون فيها المعادلة (جـ) لها معنى هي $\mathbb{R}-\{0\}$

المعادلة (جـ) تكتب على الشكل $e^{-2x}=\frac{1}{4}$

مجموعة حلول المعادلة $e^{-2x}=\frac{1}{4}$ هي نفسها مجموعة حلول المعادلة $-2x=Ln\left(\frac{1}{4}\right)$

وحلول هذه الأخيرة هي $x=-\frac{1}{2}Ln(4)$

إذن مجموعة حلول المعادلة (جـ) هي $S=\left\{-\frac{1}{2}Ln(4)\right\}$

د) مجموعة تعريف المعادلة (د) هي $]-\infty\ ,\ +\infty[$.

$(e^{-x}-5)(e^{2x}-e)=0$ تكافئ $e^{-x}-5=0$ أو $e^{2x}-e=0$

$e^{-x}-5=0$ تكافئ $e^{-x}=5$ و منه $-x=Ln(5)$ أي $x=-Ln(5)$

$e^{2x}-e=0$ تكافئ $e^{2x}=e^{1}$ ومنه $2x=1$ أي $x=\frac{1}{2}$

إذن مجموعة حلول المعادلة (د) هي $S=\left\{\frac{1}{2}\ ,\ -Ln(5)\right\}$

هـ) مجموعة تعريف المعادلة (هـ) هي $\mathbb{R}$.

المعادلة (هـ) تكتب على الشكل $e^{-x}=3+6e^{-x}$ و منه $e^{-x}=\frac{-3}{5}$

بما أن $\frac{-3}{5}\langle 0$ و $e^{-x}\rangle 0$ فإن المعادلة $e^{-x}=\frac{-3}{5}$ ليس لها حلول في $\mathbb{R}$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (هـ) هي مجموعة خالية.

تطبيق 6 — تعيين مجموعة حلول متراجحة

حل المتراجحات التالية :

أ) $e^{2x}\geq 1$ ، ب) $3e^{-x}-2\geq 0$ ، جـ) $\left(e^{x}+3\right)\left(2-e^{x}\right)\geq 0$

د) $\frac{e^{x}-1}{e^{x}}\geq 0$ ، هـ) $e^{-x^2-x}\leq 1$ ، و) $e^{x}-\frac{9}{e^{x}}\langle 0$

✓ الحل

أ) مجموعة تعريف المتراجحة (أ) هي $\mathbb{R}$.

المتراجحة (أ) تكتب على الشكل $e^{2x}\geq e^{0}$

و مجموعة حلولها هي مجموعة حلول المتراجحة $2x\geq 0$ أي $x\geq 0$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (أ) هي $S=[0\ ,\ +\infty[$

ب) مجموعة تعريف المتراجحة (ب) هي $\mathbb{R}$.

المتراجحة (ب) تكتب على الشكل $e^{-x}\geq\frac{2}{3}$ أي $e^{-x}\geq e^{Ln\left(\frac{2}{3}\right)}$

و مجموعة حلولها هي مجموعة حلول المتراجحة $-x\geq Ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

مجموعة حلول المتراجحة $-x\geq Ln\left(\frac{2}{3}\right)$ هي $\left]-\infty\ ,\ -Ln\left(\frac{2}{3}\right)\right]$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (ب) هي $S=\left]-\infty\ ,\ -Ln\left(\frac{2}{3}\right)\right]$

جـ) مجموعة تعريف المتراجحة (جـ) هي $\mathbb{R}$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $e^{x}+3\rangle 0$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي نفس حلول المتراجحة $2-e^{x}\geq 0$

$2-e^{x}\geq 0$ تعني $e^{x}\leq 2$.

مجموعة حلول المتراجحة $e^{x}\leq 2$ هي $]-\infty\ ,\ Ln(2)]$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (جـ) هي $S=]-\infty\ ,\ Ln(2)]$

د) المتراجحة $\frac{e^{x}-1}{e^{x}}\geq 0$ تكافئ $e^{x}-1\geq 0$ أي $e^{x}\geq 1$.

مجموعة حلول المتراجحة $e^{x}\geq 1$ هي $[0\ ,\ +\infty[$

ومنه مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $S=[0\ ,+\infty[$

هـ) مجموعة حلول المتراجحة $e^{-x^2-x} \leq 1$ هي نفسها مجموعة حلول المتراجحة $-x^2-x \leq 0$

و لكن مجموعة حلول المتراجحة $-x^2-x \leq 0$ هي $]-\infty ; -1] \cup [0 , +\infty[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (هـ) هي $S =]-\infty , -1] \cup [0 , +\infty[$

و) المتراجحة (و) تكتب على الشكل $\frac{(e^x-3)(e^x+3)}{e^x} \rangle 0$

و بما ان $\frac{e^x+3}{e^x} \rangle 0$ فإن مجموعة حلول المتراجحة (و) هي نفسها مجموعة حلول المتراجحة $e^x-3 \rangle 0$ و هذه الأخيرة مجموعة حلولها هي $]-\infty , Ln(3)[$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (و) هي $S =]-\infty , Ln(3)[$

تطبيق 7 تعيين مجموعة حلول معادلات و متراجحات

1) عين جذور كثيرة الحدود من الدرجة الثانية حيث $p(x) = x^2+4x-5$

2) استنتج حلول المعادلة (E) .... $e^{2x}+4e^x=5$

3) حل المتراجحة التالية $e^{2x}+4e^x-5 \leq 0$ ... (E')

✓ الحل

1) $\Delta = 16-4(1)(-5) = 36$

بما ان $\Delta \rangle 0$ فإن لـ $p(x)$ جذرين هما 1 و -5

2) بوضع $e^x = X$ المعادلة (E) تكتب $X^2+4X-5=0$

و من السؤال الأول نجد ان $X=1$ او $X=-5$

$X=-5$ مرفوض لأن $X \rangle 0$.

$X=1$ يكافئ $e^x=1$ يكافئ $x=0$

و منه مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S=\{0\}$

3) المتراجحة (E') تكتب على الشكل $(e^x-1)(e^x+5) \leq 0$

بما ان $e^x+5 \rangle 0$ فإن مجموعة حلول (E') هي نفسها مجموعة حلول المتراجحة $e^x-1 \leq 0$

$e^x-1 \leq 0$ يكافئ $x \leq 0$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (E') هي $S =]-\infty , 0]$

تطبيق 8 تعيين مجموعة حلول معادلات و متراجحات

حل المعادلات و المتراجحات التالية :

أ) $\frac{e^{-x}+1}{e^x-1} = 4$ ، ب) $e^{3x+1}+4e^{2x+3}-5e^{x+2}=0$

جـ) $e^{3x}-(e^2-1)e^{2x}=e^{x+2}$ ، د) $\frac{e^{x+1}-1}{e^{2x+2}+1} \leq \frac{e^{x+1}-2}{e^{x+1}+2}$

هـ) $4e^{2x}-e^{-2x} \leq 3$

✓ الحل

أ) مجموعة تعريف المعادلة (أ) هي $\mathbb{R}-\{0\}$

المعادلة (أ) تكتب على الشكل $4e^{2x}-5e^x-1=0$ ... $(1)'$

بوضع $e^x = X$ المعادلة $(1)'$ تكتب على الشكل $4X^2-5X-1=0$

وحلا هذه الأخيرة هما $X_1 = \frac{5+\sqrt{39}}{8}$ و $X_2 = \frac{5-\sqrt{39}}{8}$

X_2 حل مرفوض لأنه سالب.

$X = X_1$ يكافئ $e^x = X_1$ ومنه $x = Ln(X_1)$

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي $S = \{Ln(X_1)\}$

ب) مجموعة تعريف المعادلة (ب) هي $\mathbb{R}$.

بضرب المعادلة (ب) في e^{-2} نجد (1) ... $e^{3x+2}+4e^{2x+1}-5e^x=0$

و بوضع $e^x = X$ تصبح المعادلة (1) كما يلي $(1)'$......$e^2X^3+4eX^2-5X=0$

$e^2X^3+4eX^2-5X=0$ تكافئ $X(e^2X^2+4eX-5)=0$

يكافئ $(X=0)$ او $(e^2X^2+4eX-5=0)$

يكافئ $(X=0)$ او $\left(X=\frac{1}{e}\right)$ او $\left(X=\frac{-5}{e}\right)$

$X=\frac{-5}{e}$ مرفوض لأنه سالب و $X=0$ مرفوض لأنه معدوم.

$X=\frac{1}{e}$ يكافئ $e^x=\frac{1}{e}$ يكافئ $x=-1$

إذن مجموعة حلول المعادلة (ب) هي $S=\{-1\}$

جـ) بوضع $e^x = X$ المعادلة (جـ) تصبح كما يلي $X^3-(e^2-1)X^2-e^2X=0$

وهذه الأخيرة تكتب على الشكل $X^2-(e^2-1)X-e^2=0$ لأن $X \rangle 0$

حلا المعادلة $X^2-(e^2-1)X-e^2=0$ هما e^2 و -1

بما ان $X \rangle 0$ فإن -1 مرفوض.

$X=e^2$ يكافئ $e^x=e^2$ منه $x=2$

إذن مجموعة حلول المعادلة (جـ) هي $S=\{2\}$

د) مجموعة تعريف المتراجحة (د) هي $\mathbb{R}$

بوضع $X=e^{x+1}$ المتراجحة (د) تكتب $\frac{X-1}{X^2+1} \leq \frac{X-2}{X+2}$

و بالتبسيط نجد $\frac{-X^2(X-3)}{(X^2+1)(X+2)} \le 0$ .... (I)

وبما أن $\frac{X^2}{(X^2+1)(X+2)} > 0$ فإن مجموعة حلول المتراجحة (I) هي نفس مجموعة حلول المتراجحة $-(X-3)\le 0$ أي $X\ge 3$

$X\ge 3$ يكافئ $e^{x+1}\ge 3$ يكافئ $x+1\ge Ln3$ يكافئ $x\ge -1+Ln3$

و منه مجموعة حلول المتراجحة (د) هي $S=[-1+Ln3\ ,\ +\infty[$.

هـ) بضرب طرفي المتراجحة (هـ) في e^{2x} نجد $4e^{4x}-3e^{2x}-1\le 0$ ... (1)

و بوضع $e^{2x}=X$ تصبح المتراجحة (1) كما يلي $4X^2-3X-1\le 0$ .... (1)'

و مجموعة حلول المتراجحة (1)' هي $[0,1]$

$X\in[0,1]$ يكافئ $0<e^x<1$ يكافئ $x<0$

و منه مجموعة حلول المتراجحة (هـ) هي $S=]-\infty\ ,\ 0[$

تطبيق 9 : تعيين مجموعة حلول جملة معادلتين

- حل الجمل التالية :

أ) $\begin{cases}2e^x-e^y=e\\ e^x+2e^y=1\end{cases}$ ، ب) $\begin{cases}e^x+e^y=e+1\\ x+y=1\end{cases}$ ، جـ) $\begin{cases}xy=-2\\ e^{4x}\times e^y=\frac{1}{e^2}\end{cases}$

✓ الحل

أ) بوضع $X=e^x$ و $Y=e^y$ الجملة (أ) تصبح كما يلي $\begin{cases}2X-Y=e & ...(1)\\ X+2Y=1 & ...(2)\end{cases}$

بضرب المعادلة (1) في العدد 2 تصبح الجملة كما يلي

$$\begin{cases}4X-2Y=2e & ...(1)'\\ X+2Y=1 & ...(2)'\end{cases}$$

بجمع طرفي المعادلتين (1)' و (2)' طرفا لطرف نجد $5X=1+2e$ و منه $X=\frac{1+2e}{5}$

و بتعويض قيمة X في المعادلة (2)' نجد $Y=\frac{1-X}{2}=\frac{2-e}{5}$

$X=\frac{1+2e}{5}$ يكافئ $e^x=\frac{1+2e}{5}$ يكافئ $x=Ln\left(\frac{1+2e}{5}\right)$

$Y=\frac{2-e}{5}<0$ و منه y غير موجود و بالتالي الجملة (أ) ليس لها حلولا في IR^2

ب) لدينا $x+y=1$ منه $y=1-x$ و بتعويض عبارة y في المعادلة $e^x+e^y=e+1$

نجد $e^{2x}-(e+1)e^x+e=0$ .... (*)

بوضع $X=e^x$ المعادلة (*) تكتب $X^2-(e+1)X+e=0$ وحلا هذه الأخيرة هما e و 1

$X=1$ يكافئ $e^x=1$ يكافئ $x=0$

$X=e$ يكافئ $e^x=e$ يكافئ $x=1$

لما $x=0$ نجد $y=1$ و لما $x=1$ نجد $y=0$

و منه مجموعة حلول الجملة (ب) هي $S=\{(0,1),(1,0)\}$

جـ) الجملة (جـ) تكتب على الشكل $\begin{cases}xy=-2\\ e^{4x+y}=e^{-2}\end{cases}$ أي $\begin{cases}xy=-2\\ 4x+y=-2\end{cases}$

من المساواة $xy=-2$ نجد $y=\frac{-2}{x}$ مع $x\ne 0$

نعوض عبارة y في المعادلة $4x+y=-2$ نجد $4x-\frac{2}{x}=-2$

بالتبسيط نجد $4x^2+2x-2=0$ و حلا هذه الأخيرة هما $\frac{1}{2}$ و -1

لما $x=\frac{1}{2}$ نجد $y=-4$ و لما $x=-1$ نجد $y=2$.

اذن مجموعة حلول الجملة (جـ) هي $\left\{\left(\frac{1}{2},-4\right),(-1,2)\right\}$

تطبيق 10 : حساب نهايات دالة

عين نهاية الدالة f عند العدد المعطى في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $f(x)=\frac{e^x-1}{3x}$ عند 0 و $(+\infty)$ و $(-\infty)$

ب) $f(x)=5xe^{-x}$ عند $-\infty$

جـ) $f(x)=\frac{2e^x-2}{2x-2}$ عند $+\infty$ و $(-\infty)$

د) $f(x)=e^{2x}-\frac{1}{e^{-x}}+1$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

هـ) $f(x)=2x-1+e^{-x}$ عند $(-\infty)$

✓ الحل

أ) $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\times\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{3}$ لأن $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim \frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{3x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)\times\frac{1-\frac{1}{e^x}}{3} = +\infty$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{e^x}}{3}=\frac{1}{3}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^x-1\right)\times\frac{1}{3x}=0$ لأن $\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-1\right)=-1$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}5xe^{-x}=-\infty$

جـ) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x-2}{2x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\left[\frac{2-\frac{2}{e^x}}{2-\frac{2}{x}}\right]=+\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{2}{e^x}}{2-\frac{2}{x}}=1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2e^x-2\right)\times\frac{1}{2x-2}=0$

لأن $\lim_{x\to-\infty}\left(2e^x-2\right)=-2$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x-2}=0$

د) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-\frac{1}{e^{-x}}+1\right)=\lim_{x\to+\infty}e^{2x}\left(1-e^{-x}+e^{-2x}\right)=+\infty$

لأن $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}e^{-2x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-\frac{1}{e^{-x}}+1\right)=1$ لأن $\lim_{x\to-\infty}e^{2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}=0$

هـ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}x\left[2-\frac{1}{x}+\frac{1}{xe^x}\right]=+\infty$

تطبيق 11 حساب العدد المشتق

عين المجال الذي تكون فيه الدالة f قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات التالية : ا) $f(x)=\left(x^2-3x\right)e^x$ ، ب) $f(x)=\frac{e^x}{x-1}$
جـ) $f(x)=\frac{e^x-1}{1+e^{-x}}$ ، د) $f(x)=\frac{e^x-1}{x+1}$ ، هـ) $f(x)=e^x\cos x$

الحل

ا) الدالة f قابلة للاشتقاق $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما $x\mapsto\left(x^2-3x\right)$ و $x\mapsto e^x$ و لدينا $f'(x)=2xe^x+e^x\left(x^2-3x\right)=e^x\left(x^2-x\right)$

ب) الدالة f قابلة للاشتقاق $\mathbb{R}-\{1\}$ و لدينا $f'(x)=\frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$

جـ) الدالة f قابلة للاشتقاق $\mathbb{R}$

و لدينا $f'(x)=e^x\times\frac{1}{1+e^{-x}}+\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\left(e^x-1\right.=\frac{e^x-e^{-x}+2}{(1+e^{-x})^2}$

د) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$

و لدينا $f'(x)=\frac{e^x(x+1)-\left(e^x-1\right)}{(x+1)^2}=\frac{xe^x+1}{(x+1)^2}$

هـ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ هما $x\mapsto\cos x$ و $x\mapsto e^x$ و لدينا $f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x\left(\cos x-\sin x\right)$

تطبيق 12 دراسة استمرارية و قابلية اشتقاق دالة عند عدد

f دالة معرفة بـ $\begin{cases} f(x)=2e^{x-1}-1 & , x\leq1 \\ f(x)=2-x & , x>1 \end{cases}$

1) عين مجموعة التعريف الدالة f
2) ادرس استمرار f عند $x=1$
3) ادرس قابلية اشتقاق f عند $x=1$

الحل

1) الدالة $x\mapsto2e^{x-1}-1$ معرفة على $\mathbb{R}$ بالتالي فهي معرفة على $]-\infty,1]$
و الدالة $x\mapsto2-x$ معرفة على $\mathbb{R}$ فهي معرفة على $]1,+\infty[$.
لأن الدالة f معرفة على $]-\infty,1]\cup]1,+\infty[$ أي معرفة على $\mathbb{R}$.

2) f مستمرة عند 1 يعني أن $1\in D_f$ و $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1^{>}} f(x)=\lim_{x\to1^{>}}(2-x)=1=f(1)$

$\lim_{x\to1^{<}} f(x)=\lim_{x\to1^{<}}\left(2e^{x-1}-1\right)=1=f(1)$

لأن $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$ و عليه فإن f مستمرة عند العدد 1.

3) f قابلة للاشتقاق عند 1 يعني أن $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\ell$

$$\lim_{x\to1^{>}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2e^{x-1}-1-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1} 2\,\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=\lim_{X\to0} 2\,\frac{e^{X}-1}{X}=2=\ell_1$$

$$\lim_{x\to1^{<}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2-x-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{x-1}=-1=\ell_2$$

بما أن $\lim\limits_{x\to1^{<}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim\limits_{x\to1^{>}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ فإن f غير قابلة للإشتقاق عند 1

تطبيق 13 المستقيم المقارب المائل- التمثيل البياني

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=-x-1+\frac{4e^x}{1+e^x}$، و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1) عين نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

2) أ) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=-x-1$ مقارب لـ (γ) مائل بجوار $-\infty$

ب) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x+3$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $+\infty$

جـ) شكل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم (γ)

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\left(-x-1+\frac{4e^x}{1+e^x}\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim\left(-x-1+\frac{4e^x}{1+e^x}\right)=-\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}4\frac{e^x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{1+e^{-x}}=4$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-1)=-\infty$

2) أ) (d) مستقيم مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(-\infty)$ يعني $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(-x-1)=0$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4e^x}{1+e^x}=0$ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-1)]=$ فإن (d) مقارب مائل بجوار $(-\infty)$

ب) (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(+\infty)$ يعني $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+3)]=0$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+3)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-4+\frac{4e^x}{1+e^x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{1+e^x}=0$

فإن (Δ) مستقيم مقارب مائل بجوار $(+\infty)$

جـ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=-\frac{(e^x-1)^2}{(1+e^x)^2}$

$f'(x)=0$ تكافئ $e^x-1=0$

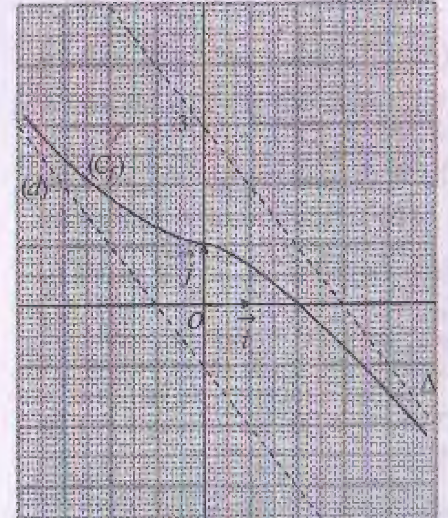
يكافئ $x=0$.

من أجل كل $x\neq0$

يكون $f'(x)<0$

إذن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	$-$	0	$-$
تغيرات f	$+\infty$	↘	$-\infty$



$f'(x)$ ينعدم عند $x=0$

و لا يغير إشارته

و منه النقطة $A(0,1)$

هي نقطة إنعطاف لـ (C_f)

تطبيق 14 تعيين عبارة دالة ثم رسم تمثيلها البياني

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2e^x+ax+b$ ، (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس حيث a و b حقيقيان.

1) عين a و b بحيث المنحني (γ) يمر من النقطة $o(0,0)$ و معامل توجيه المماس لـ (γ) عند النقطة o هو -2.

2) من أجل الدالة المحصل عليها سابقا.

أ) عين نهاية الدالة f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f

جـ) استنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ حلين إحداهما 0 و الآخر α حيث $1<\alpha<2$

د) عين اشارة $f(x)$ حسب قيم x.

هـ) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=-4x-2$ مقارب مائل بجوار $(-\infty)$ ثم ادرس وضعية (d) بالنسبة إلى (γ) ثم ارسم (γ) و (d)

✓ الحل

1) - (γ) يمر من النقطة $o(0,0)$ يعني أن $f(0)=0$

$f(0)=0$ تكافئ $2+b=0$ تكافئ $b=-2$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=2e^x+a$

$f'(0)=-2$ تعني $2+a=-2$ و منه $a=-4$

إذن الدالة المطلوبة هي $f(x)=2e^x-4x-2$

2) أ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2e^x-4x-2)=+\infty$

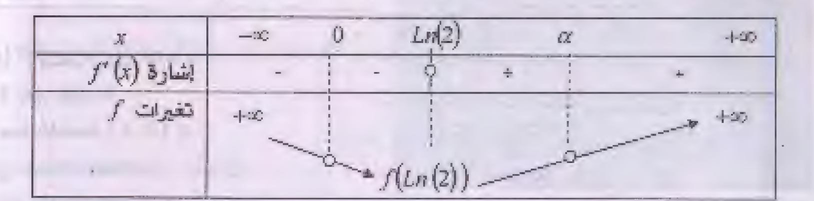
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x\left(\frac{e^x}{x}-2-\frac{1}{x}\right) = +\infty$

ب) من السؤال (1) لدينا $f'(x) = 2e^x-4$

$f'(x)=0$ يكافئ $e^x=2$ يكافئ $x=Ln(2)$

لما $x〉Ln2$ فإن $2e^x-4〉0$ و منه f متزايدة تماما على $]Ln2\ ,\ +\infty[$

لما $x〈Ln2$ فإن $2e^x-4〈0$ و منه f متناقصة تماما على $]-\infty\ ,\ Ln2[$



x	$-\infty$	0	$Ln(2)$	α	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	-	0	+	+
تغيرات f	$+\infty$		$f(Ln(2))$		$+\infty$

$f(Ln2)\approx -0,76$

جـ) بما أن $f(0)=0$ فإن 0 حلا للمعادلة $f(x)=0$

- بما أن من أجل كل x من $]Ln(2),+\infty[$ لدينا $f'(x)〉0$

و $0\in]2-4Ln2\ ,+\infty[$ فإن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α من $]Ln2\ ,+\infty[$

و بما أن $f(1)〈0$ و $f(2)〉0$ فإن $1〈\alpha〈2$

د) - إذا كان $x\in]-\infty\ ,\ 0[\ \cup\ ]\alpha\ ,\ +\infty[$ فإن $f(x)〉0$

- إذا كان $x\in]0\ ,\ \alpha[$ فإن $f(x)〈0$

هـ) (d) مستقيم مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(-\infty)$ يعني أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-4x-2)=0$

بما أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-4x-2)=\lim_{x\to-\infty} 2e^x=0$

فإن (d) مستقيم مقارب لـ (γ) بجوار $(-\infty)$

- لدراسة الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d)

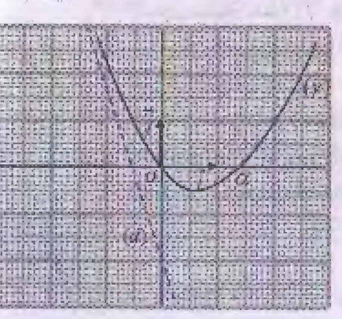
نعين إشارة المقدار $f(x)-(-4x-2)$ على $\mathbb{R}$

لدينا $f(x)-(-4x-2)=2e^x$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $2e^x〉0$

و منه $f(x)-(-4x-2)〉0$

أي أن المنحني (γ) يقع فوق المستقيم (d)



تطبيق 15 تعيين التمثيل البياني لدوال انطلاقا من بيان معطى

ارسم في معلم متعامد ومتجانس المنحني (C_f) الممثل للدالة $x\longmapsto e^x$

ثم استنتج التمثيل البياني لكل دالة من الدوال التالية انطلاقا من (γ)

$K(x)=2-e^x$ ، $L(x)=|3-e^x|$ ، $g(x)=e^x-3$

الحل

أ) بما أن $g(x)=e^x-3=f(x)-3$ فإن بيان الدالة g هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-3\vec{j}$

(C_f) له مستقيم مقارب معادلته $y=0$ بجوار $-\infty$

و (C_g) له مستقيم مقارب معادلته $y=-3$ بجوار $-\infty$.

ب) $\begin{cases} L(x)=3-e^x\ ,\ x\le Ln3 \\ L(x)=e^x-3\ ,\ x\ge Ln3 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} L(x)=-g(x)\ ,\ x\le Ln3 \\ L(x)=g(x)\ ,\ x\ge Ln3 \end{cases}$

- على المجال $[Ln3\ ,\ +\infty[$ بيان الدالة L منطبق على (C_g)

- على المجال $]-\infty\ ,Ln3]$ بيان الدالة L هو نظير (C_g) بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y=0$

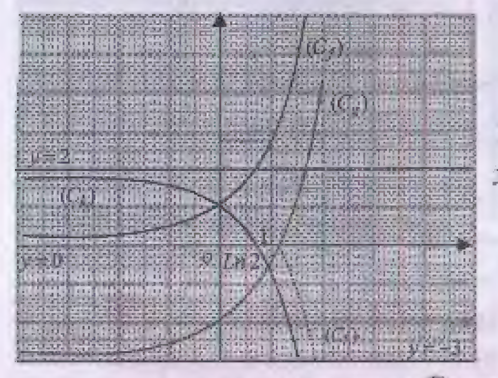
جـ) $K(x)=2-e^x=2-f(x)$

و منه $\frac{K(x)+f(x)}{2}=1$

أي أن بيان الدالة K هو نظير (C_f) بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y=1$

- (C_K) يقطع (xx') في النقطة ذات الفاصلة $Ln2$

و (C_L) يقطع (xx') في النقطة ذات الفاصلة $Ln3$



تطبيق 16 دراسة تغيرات دالة و رسم تمثيلها البياني

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ $f(x)=e^{-x}+\frac{1-x}{1+x}$ و (γ) التمثيل البياني لها في معلم متعامد ومتجانس.

1) ادرس نهاية الدالة f عند أطراف المجالين $]-1\ ,\ +\infty[$ ، $]-\infty\ ,\ -1[$

2) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم (γ)

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{1+x}=-1$

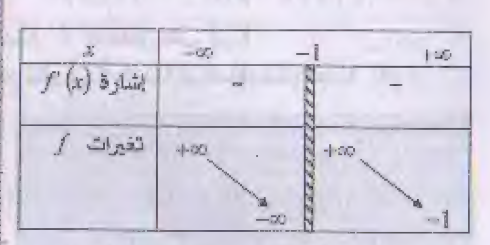
$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1} e^{-x}=e$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-1}\dfrac{1-x}{1+x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} e^{-x}=e$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1}\dfrac{1-x}{1+x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x}{1+x}=-1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f و لدينا $f'(x)=-e^{-x}-\dfrac{2}{(1+x)^2}$

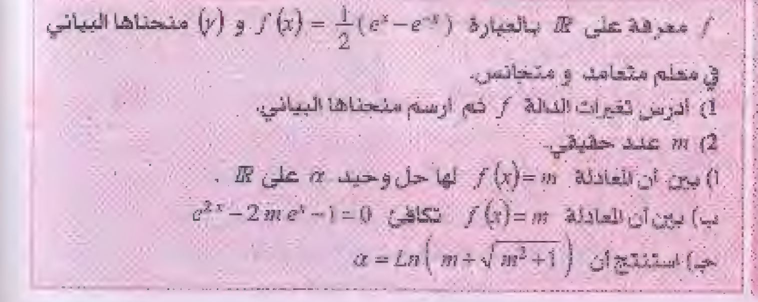
من اجل كل x من D_f يكون $f'(x)<0$
و منه f متناقصة تماما على كل
من المجالين $]-1,+\infty[$ و $]-\infty\,;-1[$



x	$-\infty$	-1	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	$-$	‖	$-$
تغيرات f	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow -1$

$y=-1$ مستقيم مقارب افقي بجوار $(+\infty)$
(γ) يقطع (yy') في النقطة $A(0,2)$

تطبيق 17 رسم تمثيل بياني لدالة و حل معادلات



f معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=\dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.
1) ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم منحناها البياني.
2) m عدد حقيقي.
ا) بين أن المعادلة $f(x)=m$ لها حل وحيد α على $\mathbb{R}$.
ب) بين أن المعادلة $f(x)=m$ تكافئ $e^{2x}-2me^{x}-1=0$
جـ) استنتج أن $\alpha=Ln\left(m+\sqrt{m^2+1}\right)$

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} -e^{-x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$

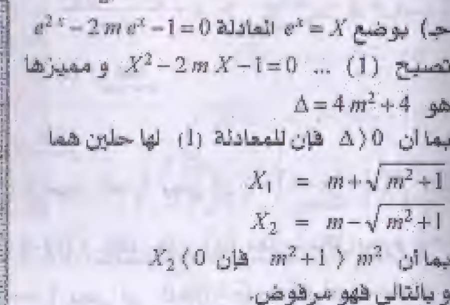
- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'(x)=\dfrac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$

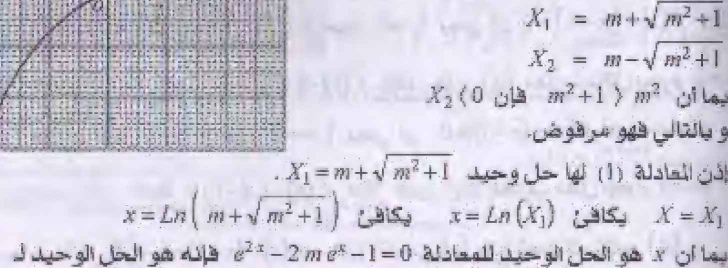
من اجل كل x من $\mathbb{R}$
لدينا $f'(x)>0$ لأن $e^{-x}>0$ و $e^{x}>0$
إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$
- (γ) يقطع (yy') في $O(0,0)$

x	$-\infty$	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	$+$	
تغيرات f	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

2) ا) بما ان $f'(x)>0$ من اجل كل x من $\mathbb{R}$ و $m\in\,]-\infty\,,+\infty[$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$.

ب) $f(x)=m$ يكافئ $\dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})=m$ يكافئ $e^{2x}-2me^{x}-1=0$





جـ) بوضع $e^{x}=X$ المعادلة $e^{2x}-2me^{x}-1=0$ تصبح $X^2-2mX-1=0$ ... (1) و مميزها هو $\Delta=4m^2+4$
بما ان $\Delta>0$ فإن للمعادلة (1) لها حلين هما
$X_1 = m+\sqrt{m^2+1}$
$X_2 = m-\sqrt{m^2+1}$
بما أن $m^2+1>m^2$ فإن $X_2<0$
و بالتالي فهو مرفوض.
إذن المعادلة (1) لها حل وحيد $X_1=m+\sqrt{m^2+1}$.
$X=X_1$ يكافئ $x=Ln(X_1)$ يكافئ $x=Ln\left(m+\sqrt{m^2+1}\right)$
بما ان x هو الحل الوحيد للمعادلة $e^{2x}-2me^{x}-1=0$ فإنه هو الحل الوحيد لـ $f(x)=m$ إذن $\alpha=Ln\left(m+\sqrt{1+m^2}\right)$

تطبيق 18 رسم تمثيل بياني لدالة و حل معادلات

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=x-\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) أ) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $f(x)$ يكتب على الشكل

$f(x)=x-1+\frac{2}{e^x+1}$ و $f(x)=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}$

ب) ادرس نهايات f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

جـ) بين أن المستقيمين (d_1) و (d_2) حيث $(d_1): y=x+1$ و $y=x-1$: (d_2) مقاربان لـ (γ) عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$ على التوالي

د) عين الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d_1) و (d_2)

2) أ) بين أن الدالة f فردية.

ب) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0,+\infty[$

3) ارسم (d_1) ، (d_2) و (γ) والمماس لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$

4) بين أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا α محددا حصرا له بتقريب $0,1$

✓ الحل

1) أ) $f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}=x-\frac{e^x+1-2}{e^x+1}=x-\frac{e^x+1}{e^x+1}+\frac{2}{e^x+1}=x-1+\frac{2}{e^x+1}$

$x+1-\frac{2e^x}{1+e^x}=x+\frac{1+e^x-2e^x}{1+e^x}=x+\frac{1-e^x}{1+e^x}=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}=f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+1-\frac{2e^x}{1+e^x}\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{2}{e^x+1}\right)=+\infty$

جـ) (d_1) مستقيم مقارب مائل لـ (γ) في جوار $(-\infty)$ يعني أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=0$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{2e^x}{e^x+1}=0$ فإن (d_1) مقارب مائل بجوار $(-\infty)$

(d_2) مقارب مائل لـ (γ) في جوار $(+\infty)$ يعني أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=0$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1}=0$ فإن (d_2) مقارب مائل بجوار $(+\infty)$

د) بما أن $f(x)-(x+1)=-\frac{2e^x}{e^x+1}<0$ فإن المنحني (γ) يقع تحت المستقيم (d_1)

بما أن $f(x)-(x-1)=\frac{2}{e^x+1}>0$ فإن المنحني (γ) يقع فوق المستقيم (d_2)

2) أ) f فردية يعني أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $-x$ ينتمي إلى $\mathbb{R}$ و $f(-x)=-f(x)$.

$f(-x)=-x-\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-x-\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=-x-\frac{1-e^x}{1+e^x}=-x+\frac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$

إذن f دالة فردية.

ب) بما أن f فردية فإننا نقتصر دراستها على المجموعة $D_f \cap \mathbb{R}_+=[0,+\infty[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$

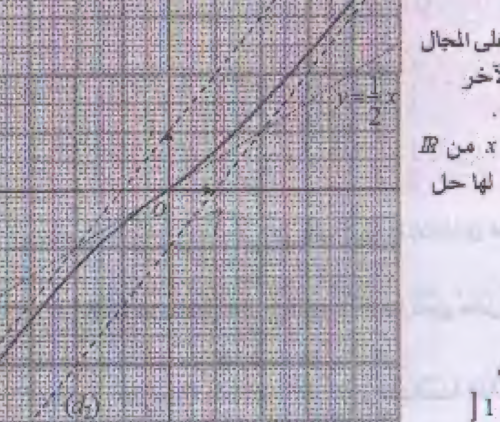
و لدينا $f'(x)=\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}>0$

و منه f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

x	0 $+\infty$
إشارة $f'(x)$	$+$
تغيرات f	$0 \nearrow +\infty$

3) معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة $x=0$ هي $y=\frac{1}{2}x$

بما أن f فردية نرسم بيانها على المجال $[0,+\infty[$ و نتمم رسم الجزء الآخر بالتناظر بالنسبة إلى المركز O.



4) بما أن $f'(x)>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و $1\in\mathbb{R}$ فإن المعادلة $f(x)=1$ لها حل وحيد α على $\mathbb{R}$

$f(1)-1=-\frac{e-1}{e+1}<0$

$f(2)-1=1-\frac{e^2-1}{e^2+1}>0$

$(f(2)-1)\times(f(1)-1)<0$

ومنه α تنتمي إلى المجال $]1,2[$

نستعمل طريقة المسح بخطوة قدرها $P=0,1$ فنحصل على الجدول المجاور

و منه $1,0<\alpha<1,1$

x	y
1	$-\frac{e-1}{e+1}$
1,1	0,6

تطبيق 19 دراسة قابلية اشتقاق دالة و رسم التمثيل البياني

f معرفة على $[0,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ من أجل $x>0$ و $f(0)=0$ ، (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=1$ مقارب لـ (γ)

2) من أجل كل $x>0$ نضع $t(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$

ادرس نهاية $t(x)$ عند الصفر، ثم استنتج أن f قابلة للاشتقاق عند الصفر

3) أ) بين انه من اجل كل $x \rangle 0$ يكون $f'(x)=\frac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$

ب) ادرس تغيرات f مشكلا جدول تغيراتها ثم ارسم (d) و (γ)

✓ الحل

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}}=1$

إذن فالمستقيم (d) ذو المعادلة $y=1$ مقارب لـ (γ)

2) $\lim\limits_{x\to 0} t(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\frac{x^2+x+1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$ وبوضع $X=\frac{1}{x}$ نجد

$$\lim_{x\to 0} t(x)=\lim_{X\to+\infty}-\left(-Xe^{-X}\right)+4\left(-\frac{1}{2}Xe^{-\frac{1}{2}X}\right)^2-27\left(-\frac{1}{3}Xe^{-\frac{1}{3}X}\right)^3=0$$

لأن $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(-Xe^{-X}\right)=0$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}-\frac{1}{2}Xe^{-\frac{1}{2}X}=0$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}Xe^{-\frac{1}{3}X}\right)=0$

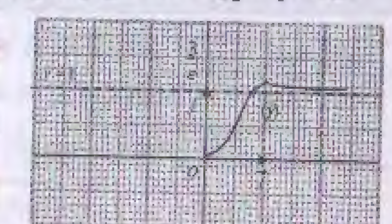
بما أن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ فإن f قابلة للاشتقاق عند الصفر والعدد المشتق هو $f'(0)=0$.

3) أ) f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و من اجل كل $x \rangle 0$ لدينا $f'(x)=\frac{e^{-\frac{1}{x}}(1-x)}{x^4}$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-x$

الدالة f متزايدة تماما على $[0,1]$ و متناقصة تماما على المجال $]1,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		+	0	-	
تغيرات f	0	↗	$\frac{e}{3}$	↘	1



تطبيق 20 دراسة قابلية اشتقاق دالة ورسم التمثيل البياني

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بالعبارة $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I) 1) عين نهاية f على اطراف المجال $]0,+\infty[$.

2) أ) تحقق انه من اجل كل $x \rangle 0$ يكون $f(x)-x-1=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{x^{-1}}-1$

ب) استنتج نهاية $(f(x)-x-1)$ عند $(+\infty)$ و بين ان المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (γ). (تقبل ان من اجل $x \rangle 0$ يكون (d) تحت (γ))

3) ادرس تغيرات الدالة f على $]0,+\infty[$ مشكلا جدول تغيراتها

II) 1) عين نهايات الدالة f على اطراف المجال $]-\infty,0[$

2) بين ان المستقيم ذا المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(-\infty)$

(تقبل ان من اجل كل $x \langle 0$ فإن (d) يقع فوق (γ))

3) g دالة معرفة على $]-\infty,0]$ بـ $\begin{cases} g(x)=f(x) \;,\; x\langle 0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

أ) حدد نهاية $\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ لما x يؤول الى 0.

ب) استنتج ان g قابلة للاشتقاق عند الصفر.

جـ) ادرس تغيرات g على $]-\infty,0]$ مشكلا جدول تغيراتها ثم ارسم (γ).

✓ الحل

I) 1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$ (مع $X=\frac{1}{x}$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{\frac{1}{x}}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$.

2) أ) $f(x)-x-1=xe^{\frac{1}{x}}-x-1=x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)-1=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x-1]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1\right]=\lim\limits_{X\to 0}\left[\frac{e^X-1}{X}-1\right]=0$ مع $\left(X=\frac{1}{x}\right)$

إذن فالمستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(+\infty)$.

3) الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$

ومن اجل $x \rangle 0$ لدينا $f'(x)=\frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

$f'(x)=0$ يكافئ $x=1$

- اذا كان $x \rangle 1$ فإن $f'(x) \rangle 0$

ومنه f متزايدة تماما على $]1,+\infty[$.

- اذا كان $0 \langle x \langle 1$ فإن $f'(x) \langle 0$ منه f متناقصة تماما على $]0,1]$.

x	0		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$	‖	-	0	+	
تغيرات f	‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

1) أ) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x e^{\frac{1}{x}}=0$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(x)-x-1\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-1\right]=\lim\limits_{X\to 0}\left[\dfrac{e^{X}-1}{X}-1\right]=0$ مع $X=\dfrac{1}{x}$

إذن فالمستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(-\infty)$

3) أ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}=0$

ب) بما أن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=0$

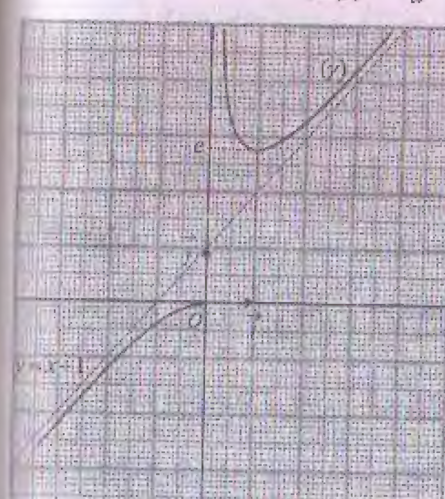
فإن g قابلة للاشتقاق عند الصفر.

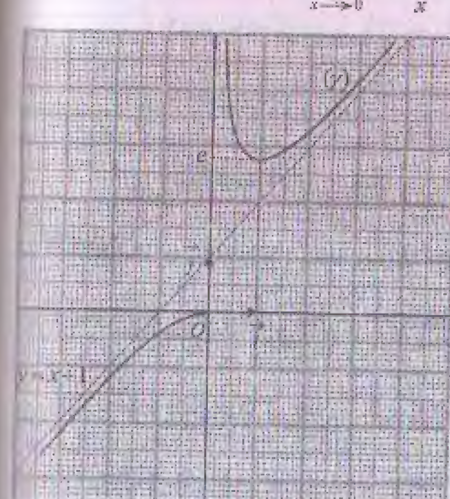
جـ) الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0]$

ومن أجل كل $x\langle 0$ لدينا $g'(x)=\dfrac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

من أجل $x\langle 0$ لدينا $g'(x)\rangle 0$

و منه g متزايدة تماما على المجال $]-\infty,0]$.





x	$-\infty$	0
إشارة $g'(x)$	+	
تغيرات g	$-\infty$ ↗	0

تطبيق 21 التمثيل البياني لدالة وحل معادلات

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $g(x)=e^{x}+x+1$

1) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ يطلب إيجاد حصرا له

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x)=\dfrac{xe^{x}}{e^{x}+1}$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) بين أن $f'(x)=\dfrac{e^{x}g(x)}{(e^{x}+1)^{2}}$ ثم استنتج تغيرات f على $\mathbb{R}$.

2) بين أن $f(\alpha)=\alpha+1$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

3) عين معادلة المماس (d) لـ (γ) عند النقطة ذات الفاصلة صفر ثم أدرس الوضع النسبي لـ (d) و (γ)

4) عين نهاية f عند $(-\infty)$ ثم اعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

5) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (γ) في جوار $(+\infty)$

6) أدرس وضعية (γ) بالنسبة إلى (Δ) ثم ارسم (d) و (Δ) و (γ).

✓ الحل

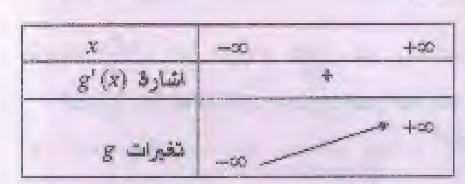
I) 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا $g'(x)=e^{x}+1$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $g'(x)\rangle 0$

ومنه g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	+	
تغيرات g	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2) بما أن $g'(x)\rangle 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و $0\in\mathbb{R}$ فإن للمعادلة $g(x)=0$ لها حل وحيد α على $\mathbb{R}$.

بما أن $f(-1)=\dfrac{1}{e}\rangle 0$ و $f(-2)=\dfrac{1}{e^{2}}-1\langle 0$ فإن $-2\langle\alpha\rangle -1$

3) إذا كان $x\rangle\alpha$ فإن $g(x)\rangle 0$ و إذا كان $x\langle\alpha$ فإن $g(x)\langle 0$

II) 1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا

$$f'(x)=\frac{(e^{x}+xe^{x})(1+e^{x})-e^{x}xe^{x}}{(1+e^{x})^{2}}=\frac{e^{x}\left[(1+x)(1+e^{x})-xe^{x}\right]}{(1+e^{x})^{2}}=\frac{e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}g(x)$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $\dfrac{e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}\rangle 0$

و عليه إذا كان $x\rangle\alpha$ فإن $f'(x)\rangle 0$ و إذا كان $x\langle\alpha$ فإن $f'(x)\langle 0$

و إذا كان $x=\alpha$ فإن $f'(\alpha)=0$

2) $g(\alpha)=0$ يكافئ $e^{\alpha}+\alpha+1=0$ يكافئ $e^{\alpha}=-\alpha-1$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha e^{\alpha}}{1+e^{\alpha}}=\frac{\alpha(-\alpha-1)}{1-\alpha-1}=\frac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha}=\alpha+1$$

بإضافة 1 إلى أطراف المتباينة $-2 \langle \alpha \langle -1$ نجد $-1 \langle 1+\alpha \langle 0$ إذن $-1 \langle f(\alpha) \langle 0$

3) معادلة المماس لـ (γ) عند الصفر هي $(d) : y=\frac{1}{2}x$

- دراسة الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d)

$$f(x)-\frac{1}{2}x=\frac{x e^x}{1+e^x}-\frac{1}{2}x=\frac{x e^x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x e^x}{1+e^x}=\frac{\frac{1}{2}x e^x-\frac{1}{2}x}{1+e^x}=\frac{\frac{1}{2}x\left(e^x-1\right)}{1+e^x}$$

إشارة $\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)$ من إشارة المقدار $\frac{1}{2}x(e^x-1)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{2}x$	-	0	+
e^x-1	-	0	+
$f(x)-\frac{1}{2}x$	+	0	+

من الجدول المجاور نستنتج

ان من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$f(x)-\frac{1}{2}x \geq 0$

أي المنحني (γ) يقع فوق المستقيم (d)

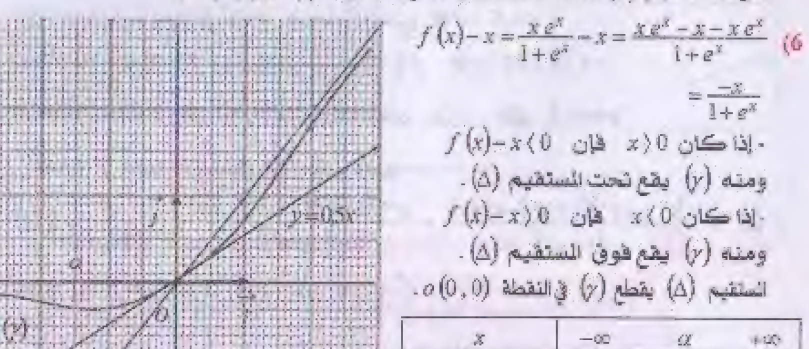
و يمسه في النقطة $o(0,0)$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{1+e^x}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^x}=1$

المنحني (γ) له مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=0$ بجوار $(-\infty)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x e^x-x-x e^x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{1+e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=0$

إذن فالمستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (γ) بجوار $(+\infty)$



6) $f(x)-x=\frac{x e^x}{1+e^x}-x=\frac{x e^x-x-x e^x}{1+e^x}$

$=\frac{-x}{1+e^x}$

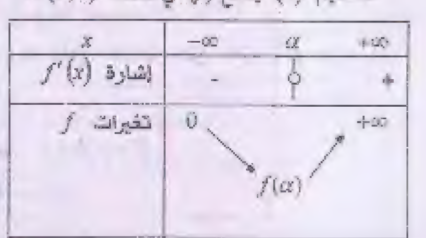
- إذا كان $x \rangle 0$ فإن $f(x)-x \langle 0$

ومنه (γ) يقع تحت المستقيم (Δ).

- إذا كان $x \langle 0$ فإن $f(x)-x \rangle 0$

ومنه (γ) يقع فوق المستقيم (Δ).

المستقيم (Δ) يقطع (γ) في النقطة $o(0,0)$.



x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة $f'(x)$	-	0	+
تغيرات f	0 ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

تطبيق 22 الدوال و المحل الهندسي

في معلم متعامد و متجانس نعتبر المنحنيين (γ_1) و (γ_2) الممثلين للدالتين $x \to e^x$ و $x \to e^{-x}$.

نرفق بكل عدد حقيقي m النقطة $A(m,o)$ و لتكن النقطتين M و N من المنحنيين (γ_1) و (γ_2) على الترتيب فاصلتهما m.

1) ارسم (γ_1) و (γ_2) في المعلم $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

2) (T_1) و (T_2) مماسان لـ (γ_1) و (γ_2) في النقطتين M و N على التوالي. أوجد معادلة كل من (T_1) و (T_2) ثم بين أن (T_1) و (T_2) متعامدان.

3) المستقيمان (T_1) و (T_2) يتقاطعان في النقطة p. بين أن احداثيتي p هي $x=m-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}$ و $y=\frac{2}{e^m+e^{-m}}$

4) لتكن I منتصف القطعة المستقيمة $[M N]$

أ) أوجد بدلالة m احداثيي النقطة I.

ب) أوجد المحل الهندسي للنقطة I لما m يمسح $\mathbb{R}$.

جـ) ارسم مجموعة النقط I في نفس المعلم السابق.

✓ الحل

1) (γ_2) هو نظير (γ_1) بالنسبة إلى محور التراتيب

2) $(T_1) : y=e^m(x-m)+e^m$

$(T_2) : y=-e^{-m}(x-m)+e^{-m}$

ميل (T_1) × ميل (T_2) $=\left(-e^{-m}\right)\times e^m=-1$

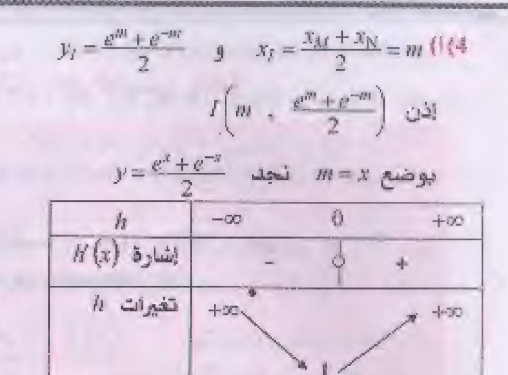
و منه (T_1) و (T_2) متعامدان

3) لدينا $e^m(x-m)+e^m=-e^{-m}(x-m)+e^{-m}$ و

منه $\left(e^m+e^{-m}\right)x=m e^m-e^m+m e^{-m}+e^{-m}$

إذن $x=\frac{m e^m-e^m+m e^{-m}+e^{-m}}{e^m+e^{-m}}=m-\frac{e^m-e^{-m}}{e^m+e^{-m}}$

بالتعويض x في عبارة y نجد $y=\frac{2}{e^m+e^{-m}}$

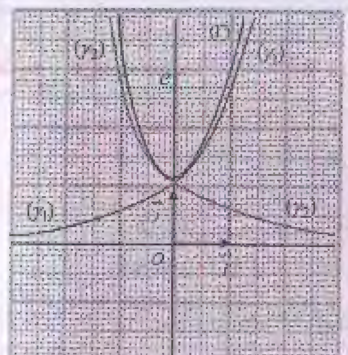


4) أ) $x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = m$ و $y_I = \frac{e^m + e^{-m}}{2}$

إذن $I\left(m \ , \ \frac{e^m + e^{-m}}{2}\right)$

بوضع $m = x$ نجد $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

h	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $h'(x)$	$-$	0	$+$
تغيرات h	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$



إذن المحل الهندسي للنقطة I هي المنحني الممثل للدالة $x \xrightarrow{h} \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

تطبيق 23 المشتقات المتتابعة والمتتاليات

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $f(x) = (1-2x)e^{2x}$

$f^{(1)}$ ، $f^{(2)}$ ، ... ، $f^{(n)}$ هي مشتقات متتالية لـ f حيث $n \geq 1$.

1) عين $f^{(2)}$ و $f^{(3)}$

2) بين بالتراجع انه من أجل كل $n \geq 1$ لدينا $f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$

3) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، التمثيل البياني لـ $f^{(n)}$ يقبل مماسا افقيا في النقطة M_n .

أ) عين x_n و y_n إحداثيتا النقطة M_n و تحقق ان M_n تنتمي إلى المنحني (γ) ذي المعادلة $y = \frac{e^{2x}}{4^x}$

ب) بين ان المتتالية (x_n) حسابية . ما هي نهايتها ؟

جـ) بين ان المتتالية (y_n) هندسية ثم ادرس نهايتها.

✓ الحل

1) $f^{(1)}(x) = -2e^{2x} + 2e^{2x}(1-2x) = e^{2x}(-2+2-4x) = e^{2x}(-4x) = 2(-2x)e^{2x}$

$f^{(2)}(x) = \left(f^{(1)}\right)' = 2e^{2x}(-4x) - 4e^{2x} = e^{2x}(-4-8x) = 2^2(-1-2x)e^{2x}$

$f^{(3)}(x) = \left(f^{(2)}\right)' = 2e^{2x}(-4-8x) + (-8)e^{2x} = e^{x}(-16-16x) = 2^3(-2-2x)e^{2x}$

2) نسمي P_n الخاصية " $f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$ "

P_1 صحيحة لأن $f^{(1)}(x) = 2^1(1-1-2x)e^{2x}$

نفرض ان P_n صحيحة من اجل عدد طبيعي غير معدوم n

و نبرهن ان P_{n+1} صحيحة اي $f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left[-2e^{2x} + 2e^{2x}(1-n-2x)\right]2^n = e^{2x}(-2+2-2n-4x) \times 2^n$$

$$= 2^{n+1}e^{2x}(-n-2x) = 2^{n+1}e^{2x}\left(1-(n+1)-2x\right)$$

إذن P_{n+1} صحيحة ومنه P_n صحيحة من اجل كل $n \geq 1$

3) أ) $f^{(n+1)}(x) = 0$ يكافئ $-n-2x = 0$ يكافئ $x = \frac{-n}{2}$

إذن $x_n = x = \frac{-n}{2}$

$y_n = f^{(n)}(x_n) = 2^n(1-n+n)e^{-n} = 2^n \times e^{-n}$

إذن $x_n = \frac{-n}{2}$; و $y_n = 2^n \times e^{-n}$

بوضع $x_n = x$ و $y_n = y$ نجد $n = -2x$ و $y = 2^{-2x}e^{2x} = \frac{e^{2x}}{4^x}$

إذن M_n تنتمي إلى المنحني ذي المعادلة $y = \frac{e^{2x}}{4^x}$

ب) بما ان $x_{n+1} - x_n = -\frac{(n+1)}{2} + \frac{n}{2} = \frac{-1}{2}$

فان (x_n) متتالية حسابية اساسها $-\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -\infty$

جـ) بما ان $y_n = \left(\frac{2}{e}\right)^n$ فان (y_n) متتالية هندسية اساسها $r = \frac{2}{e}$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$

تطبيق 24 حساب نهاية متتالية باستعمال الدوال

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ نعرف على $I = [0,1]$ الدالة f بـ

$$f(x) = -e^{-x}\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right]$$

1) احسب $f'(x)$ ثم بين انه من أجل كل x من I يكون $0 \leq f'(x) \leq 1$

2) استنتج ان $f(1) \geq f(0)$

3) باستعمال تغيرات g المعرفة على I بـ $g(x) = f(x) - \frac{x}{n!}$

بين ان $f(1) \leq f(0) + \frac{1}{n!}$

4) استنتج ان $e\left(1 - \frac{1}{n!}\right) \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq e$

5) بين ان $0 \leq e - V_n \leq \frac{3}{n!}$ حيث $V_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

6) عين نهاية المتتالية (V_n) .
7) عين n_0 بحيث من اجل $n \ge n_0$ يكون $e - V_n \le 10^{-4}$
استعمل المتباينة $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$

✓ الحل

1) $f'(x) = e^{-x}\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right] + \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{x!} + \dots \frac{+x^{n-1}}{(n-1)!}\right](-e^{-x}) = e^{-x}\left[\frac{x^n}{n!}\right]$

$1 \ge e^{-x} \ge \frac{1}{e}$ .... (1) ، $1 \ge x^4 \ge 0$ ... (2)

بالضرب حدود المتباينتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد $1 \ge e^{-x} x^n \ge 0$

$1 \ge \frac{1}{n!} > 0$ ... (3) ؛ $1 \ge e^{-x} x^n \ge 0$ .... (4)

بالضرب حدود المتباينتين (3) و (4) طرفا لطرف نجد $1 \ge \frac{e^{-x} x^n}{n!} \ge 0$ اي $1 \ge f'(x) \ge 0$

2) بما ان $f'(x)$ موجب على I فإن f متزايدة تماما على I و عليه $f(1) > f(0)$

3) لدينا $g'(x) = \frac{1}{n!}\left(e^{-x} x^n - 1\right)$

بما ان $0 \le e^{-x} x^n \le 1$ فإن $-1 \le e^{-x} x^n - 1 \le 0$ و بالتالي $g'(x) < 0$
إذن g متناقصة تماما على I و عليه $g(0) > g(1)$.
$g(0) > g(1)$ تعني $f(1) - \frac{1}{n!} \le f(0)$ اي $f(1) \le f(0) + \frac{1}{n!}$.

4) $f(0) \le f(1) \le f(0) + \frac{1}{n!}$ و منه نجد $-1 \le -e^{-1}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \le -1 + \frac{1}{n!}$

بضرب حدود هذه المتباينة في $-e$ نجد $e \ge 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \ge e\left(1 - \frac{1}{n!}\right)$

5) $V_n = 1 + \frac{1}{n!} + \dots + \frac{1}{n!}$

بما ان $V_n \le e$ فإن $e - V_n \ge 0$ ،

لدينا من السؤال الرابع المتباينة $V_n \ge e\left(1 - \frac{1}{n!}\right)$ بضرب طرفيها في -1 نجد ؛

$-V_n \le e\left(-1 + \frac{1}{n!}\right)$ و بإضافة e إلى طرفي هذه الأخيرة نجد $e - V_n \le \frac{e}{n!} \le \frac{3}{n!}$

إذن $\frac{3}{n!} \ge e - V_n \ge 0$

6) بما أن $\lim_{n \to +\infty} \frac{3}{n!} = 0$ فإن حسب نظرية الحصر نجد $\lim_{n \to +\infty}(e - V_n) = 0$
إذن $\lim_{n \to +\infty} V_n = e$

7) حتى يكون $e - V_n \le 10^{-4}$ يجب ان يكون $\frac{3}{n!} \le 10^{-4}$

بما ان $\frac{3}{n!} \le \frac{3}{2^{n-1}}$ فإن $\frac{3}{2^{n-1}} \le 10^{-4}$ حيث $2^{n-1} \ge 3 \times 10^{+4}$

ومنه ينتج $(n-1) Ln\, 2 \ge Ln\left(3 \times 10^4\right)$

إذن $n \ge \frac{Ln\left(3 \times 10^4\right)}{Ln\, 2} + 1$ اي $n \ge 15,80$

و بالتالي قيمة n_0 هي $n_0 = 16$.

تطبيق 25 حل معادلات تفاضلية

لتكن المعادلة التفاضلية (E) ... $y' = y(1-y)$. نريد إيجاد حلول (E) التي لا تنعدم على $\mathbb{R}$ لذلك نضع $z = \frac{1}{y}$
1) تحقق أن (E') .... $z' = -z + 1$
2) بين أن حلول (E') هي الدوال $x \xrightarrow{f} 1 + c e^{-x}$ حيث $c \in \mathbb{R}$.
3) استنتج حلول المعادلة (E) .

✓ الحل

1) $z' = \frac{-y'}{y} = -\frac{y(1-y)}{y^2} = \frac{y-1}{y} = 1 - \frac{1}{y} = 1 - z$

2) f حلا للمعادلة (E') يعني أن $f'(x) = -f(x) + 1$.
$f'(x) = -c e^{-x} + 1 - 1 = -\left(1 + c e^{-x}\right) + 1 = -f(x) + 1$
إذن $x \to 1 + c e^{-x}$ حلا للمعادلة (E') .

3) $z = \frac{1}{y}$ منه $y = \frac{1}{z}$ إذن $y = \frac{1}{1 + c e^{-x}}$

تطبيق 26 حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' + a y = f(x)$

لتكن (E) معادلة تفاضلية بحيث $y' + 4y = 3x e^{2x}$ و لتكن (E') معادلة تفاضلية $y' + 4y = 0$.
1) حل المعادلة (E')
2) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$.
بـ $g(x) = (ax + b)e^{2x}$ حلا خاص للمعادلة (E) .

✓ الحل

1) $y'+4y=0$ يكافئ $y'=-4y$ و حلها العام هو $y=\lambda e^{-4x}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) g حلا للمعادلة (E) هذا معناه أن (1) ... $g'(x)+4g(x)=3xe^{2x}$

$$g'(x) = ae^{2x}+2(ax+b)e^{2x} = e^{2x}(2ax+a+2b)$$

$$g'(x)+4g(x) = e^{2x}(2ax+a+2b+4ax+4b) = e^{2x}(3ax+a+3b) \ ... \ (2)$$

من (1) و (2) نجد $a+6b=0$ و $6a=3$ و منه ينتج $a=\frac{1}{2}$ و $b=-\frac{1}{12}$.

إذن $g(x) = \left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\right)e^{2x}$.

تطبيق 27 حل معادلة تفاضلية من الشكل $y'+y=f(x)$

1) نريد حل المعادلة التفاضلية (E) ... $y'+y=x+1$ حيث y دالة عددية ذات المتغير x و y' مشتقتها

ا) نضع $z=y-x$ أكتب المعادلة التفاضلية (E) بدلالة z و لتكن (F).

ب) حل المعادلة (F) ثم (E).

2) نسمي f_α حل للمعادلة (E) بحيث $f_\alpha(0)=\alpha$ و (γ_α) التمثيل البياني للدالة f_α حيث α عدد حقيقي معطى.

ا) ادرس تغيرات f_α في كل حالة من الحالات $\alpha \rangle 0$ ، $\alpha=0$ ، $\alpha \langle 0$.

ب) بين انه من اجل كل α ، المماس لـ (γ_α) عند النقطة ذات الفاصلة -1 يمر من النقطة $o(0;0)$.

جـ) بين ان كل المماسات للمنحنيات (γ_α) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 تقطع (γ_0) في نقطة وحيدة يطلب تعينها مع $\alpha \neq 0$.

✓ الحل

1) ا) $z'=y'-1$ و منه $y'=z'+1$

إذن (E) تكتب $z'+1+z+x = x+1$ أي $z'+z=0$ و منه $(F): z'+z=0$

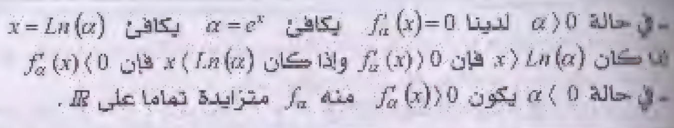
ب) الحل العام للمعادلة (F) هو $z=\lambda e^{-x}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

و بالتالي الحل العام للمعادلة (E) هو $y=\lambda e^{-x}+x$

2) $f_\alpha(0)=\alpha$ يكافئ $\lambda e^{0}+0=\alpha$ أي $\lambda=\alpha$

إذن $f_\alpha(x)=\alpha e^{-x}+x$

ا) $f'_\alpha(x)=-\alpha e^{-x}+1=\frac{-\alpha}{e^{x}}+1=\frac{-\alpha+e^{x}}{e^{x}}$



- في حالة $\alpha \rangle 0$ لدينا $f'_\alpha(x)=0$ يكافئ $\alpha=e^{x}$ يكافئ $x=Ln(\alpha)$

اذا كان $x \rangle Ln(\alpha)$ فإن $f'_\alpha(x) \rangle 0$ واذا كان $x \langle Ln(\alpha)$ فإن $f'_\alpha(x) \langle 0$

- في حالة $\alpha \langle 0$ يكون $f'_\alpha(x) \rangle 0$ منه f_α متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
إشارة $f'_\alpha(x)$		+	
تغيرات f_α	$-\infty$	↗	$+\infty$

حالة $\alpha \langle 0$

x	$-\infty$	$Ln\,\alpha$	$+\infty$
إشارة $f'_\alpha(x)$	-	0	+
تغيرات f_α	$+\infty$ ↘	$1+Ln\,\alpha$	↗ $+\infty$

حالة $\alpha \rangle 0$

في حالة $\alpha=0$ يكون $f'_\alpha(x)=1$ و منه $f_\alpha(x)=x$

(γ_0) في هذه الحالة هو مستقيم معادلته $y=x$

ب) المماس لـ (γ_α) عند النقطة ذات الفاصلة -1 هو $y=(-\alpha e+1)x$

ومنه هذا المماس يمر من المبدا $o(0,0)$.

جـ) المماسات لـ (γ_α) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 معادلتها هي

$$y=\left(\frac{-\alpha+e^{x_0}}{e^{x_0}}\right)(x-x_0)+\alpha e^{-x_0}+x_0$$

المماسات تقطع (γ_0) في نقطة وحيدة هذا معناه المعادلة

$x=\left(\frac{-\alpha+e^{x_0}}{e^{x_0}}\right)(x-x_0)+\alpha e^{-x_0}+x_0 \ ... \ (*)$ لها حل وحيد.

من $(*)$ نجد $x=x_0+1$ و منه $y=x=x_0+1$

اذن كل المماسات لـ (γ_α) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 تقطع (γ_0) في نقطة وحيدة $M_0(x_0+1\ ,\ x_0+1)$ مستقلة عن α.

تطبيق 28 حل معادلة تفاضلية من الشكل $y''+\omega y'=0$

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) ... $f''+4f'=0$

1) بوضع $g=f'$ بين ان g حلا للمعادلة (E') ... $g'+4g=0$ ثم حل (E').

2) استنتج ان حلول (E) هي الدوال $x \xrightarrow{f} -\frac{a}{4}e^{-4x}+b$ مع a و b عددان حقيقيان كيفيان.

3) من بين الحلول f عين الحل الذي يحقق $f(0)=0$ و $f\left(-\frac{1}{4}\right)=2$

✓ الحل

1) بما أن $g = f'$ فإن $g' = f''$ ، بتعويض f' و f'' في (E) نجد $g' + 4g = 0$
أي g حلا لـ (E') .
الحل العام للمعادلة (E') هو $g(x) = a e^{-4x}$ حيث a عدد حقيقي.

2) حتى تكون f حلا للمعادلة (E) يجب أن يكون $f'(x) = g(x)$

$$f'(x) = (-4)\left(-\frac{a}{4}\right)e^{-4x} = a e^{-4x} = g(x)$$

إذن حلول المعادلة (E) هي الدوال f المعرفة بـ $f(x) = -\frac{a}{4}e^{-4x} + b$

3) $f(0) = 0$ يكافئ $-\frac{a}{4} + b = 0$ ومنه $b = \frac{a}{4}$

$f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2$ يكافئ $-\frac{a}{4}e + b = 2$ ....(1)

بتعويض قيمة b في (1) نجد $\frac{-a}{4}e + \frac{a}{4} = 2$ أي $\frac{-a}{4}(e-1) = 2$

و منه $a = \frac{8}{-(e-1)}$ و $b = \frac{2}{1-e}$ إذن الدالة المطلوبة هي $x \mapsto \frac{-2}{1-e}e^{-4x} + \frac{2}{1-e}$

تطبيق 29 التناقص الأسي لتركيز الدواء في الدم

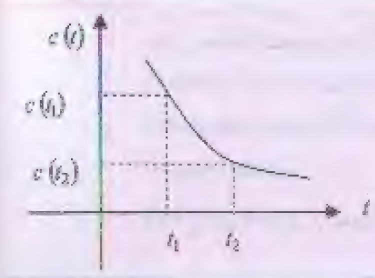
لتكن $C(t)$ التركيز بـ (mg/l) للدواء في الدم بدلالة الزمن $(t > 0)$ حيث t معبر عنه بالساعات. سرعة تخلص الجسم من هذا الدواء متناسبة مع كمية الدواء الباقية في الدم في تلك اللحظة ، ثابت التخلص يساوي $0,25$ ، التركيز الابتدائي هو $5\,mg/l$.

1) برر المساواة $C'(t) = -0,25\,C(t)$ ثم أوجد عبارة $C(t)$

2) ادرس تغيرات C و احسب نهاية $C(t)$ عند $(+\infty)$ ثم أرسم بيان الدالة C .

3) أعط حصرا بتقريب $0,01$ للحظة t_0 التي ابتداء منها يكون $C(t) < 2$

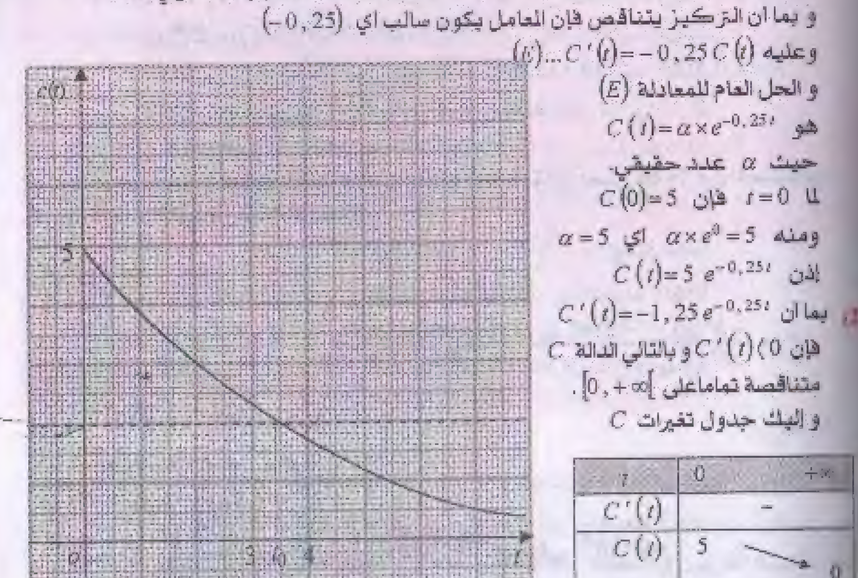
✓ الحل



1) $\lim_{t_1 \to t_2} \frac{C(t_2) - C(t_1)}{t_2 - t_1} = V_E(t_2)$

$V_E(t_2)$ هي سرعة التخلص الدم من الدواء في اللحظة t_2 .
سرعة التخلص V_E هي مشتقة التركيز $C(t)$
أي $C'(t) = V_E$

إن ثابت تخلص الجسم من الدواء هو معامل التناسب بين سرعة التخلص و التركيز في لحظة t
و بما أن التركيز يتناقص فإن المعامل يكون سالب أي $(-0,25)$
وعليه $C'(t) = -0,25\,C(t)$ ...(E)
و الحل العام للمعادلة (E)
هو $C(t) = \alpha \times e^{-0,25t}$
حيث α عدد حقيقي.
لما $t = 0$ فإن $C(0) = 5$
ومنه $\alpha \times e^0 = 5$ أي $\alpha = 5$
إذن $C(t) = 5\,e^{-0,25t}$



2) بما أن $C'(t) = -1,25\,e^{-0,25t}$
فإن $C'(t) < 0$ و بالتالي الدالة C
متناقصة تماما على $[0, +\infty[$.
و إليك جدول تغيرات C

t	0 $\qquad$ $+\infty$
$C'(t)$	$-$
$C(t)$	5 ↘ 0

3) نضع $g(t) = C(t) - 2$ و من المتباينة $C(t) < 2$ نجد $t \geq 3,66$.
بما أن $g'(t) < 0$ و $0 \in]-2\ ,\ 3[$ فإن المعادلة $g(t) = 0$ لها حل وحيد t_0 حيث $t_0 > 3,66$ باستعمال طريقة المسح بخطوة قدرها $0,01$
نحصل على الجدول التالي.
إذن $3,66 < t_0 < 3,67$

t	$g(t)$
3,66	0,00258
3,67	-0,0024

تطبيق 30 استعمال التناقص الأسي في دراسة تغير وسط بكتيري

يقوم عالم مختص في البكتيريا بملاحظة نمو مجتمع بكتيري في وسط مغلق ، يقدر العدد الابتدائي لهذا المجتمع بـ 100 بكتيريا والقدرة الاستيعابية العظمى هي 1000 بكتيريا.
لتكن $N(t)$ عدد البكتيريا في اللحظة t (معبر عنها بالساعات).
الملاحظات المستخلصة قادتنا إلى نمذجة هذه الحالة بمعادلة تفاضلية
$N'(t) = 0{,}07\,N(t)\left(1 - 10^{-3}N(t)\right)$

نضع $P(t)=\frac{1}{N(t)}$ مع $N(t)\neq 0$

1) بين ان الدالة P تحقق للمعادلة التفاضلية $P'=-0,07P+7\times10^{-5}$

2) استنتج عبارة $P(t)$ ثم $N(t)$ بدلالة t.

3) ما هو عدد البكتريا بعد 40 ساعة ؟

4) ما هوالوقت اللازم حتى يصبح عدد البكتريا يمثل 80 % من الاستيعابية العظمى لهذا الوسط ؟

✓ الحل

1) $$P'=\frac{-N'(t)}{N^2(t)}=\frac{-0,07N(t)\left(1-10^{-3}\times N(t)\right)}{N^2(t)}=\frac{-0,07\left(1-10^{-3}N(t)\right)}{N(t)}$$

$$P'=-\frac{0,07}{N(t)}+0,07\times10^{-3}$$

$$P'=-0,07P+7\times10^{-5}$$

2) $P(t)=10^{-3}+c\,e^{-0,07t}$

و بما ان $P(0)=\frac{1}{100}$ فإن $10^{-3}+c=\frac{1}{100}$ وبالتالي $c=9\times10^{-3}$

إذن $P(t)=10^{-3}\left(1+9e^{-0,07t}\right)$ و $N(t)=\frac{1000}{1+9\times e^{-0,07t}}$

3) بما ان $N(40)=647$ فإن بعد 40 ساعة عدد البكتريا يصبح 647 .

4) % 80 من البكتريا يعادل 800 بكتيريا

$N(t)=800$ يكافئ $t=51,19$

إذن عدد الساعات هي تقريبا 51 ساعة.

تطبيق 41 تحول الآزوت بالهواء الجوي إلى الكربون المشع

يحتوي الغلاف الجوي على مادة الآزوت و التي بفعل الإشعاعات الكونية تتحول إلى مادة الكربون المشع (C^{14}) ، و تحتوي الكائنات الحية على هذه المادة التي تتجدد على الدوام و عند موتها فإن مادة الكربون 14 تتحلل تدريجيا (تتناقص في الوسط).

لمعرفة زمن وفاة كائن نقوم بقياس نسبة الكربون 14 المتبقية في جسمه.

لتكن $N(t)$ عدد ذرات C^{14} المتواجدة في اللحظة t المعبر عنها بالأعوام في عينة من مادة عضوية.

بين الفيزيائيون أن الدالة N تحقق المعادلة $N'(t)=-k\times N(t)$ من اجل

كل عدد حقيقي موجب t حيث $k=1,245\times10^{-4}$ و $N(0)=N_0$.

نقول ان سرعة تحلل C^{14} متناسبة مع عدد ذرات C^{14} المتواجدة في تلك اللحظة

1) اوجد $N(t)$ بدلالة N_0 و t

2) ما هي نسبة ذرات الكربون C^{14} المفقودة خلال 10000 سنة ؟

3) نسمي نصف حياة الكربون C^{14} الزمن المطلوب لاستحالة نصف عدد ذرات C^{14}

ا) برر العلاقة $N(t+T)=\frac{1}{2}N(t)$ حيث T هو نصف حياة C^{14} .

ب) استنتج ان $T=\frac{Ln(2)}{k}$ معينا قيمة تقريبية له

4) قام علماء الآثار بتحليل شظايا لعظام وجدت في كهف ، فوجدوا نسبة الكربون C^{14} الموجودة في هذه العظام تمثل 20 % من نسبة الكربون C^{14} الموجودة في عينة عظام جديدة لها نفس الكتلة.اوجد عمر شظايا العظام.

✓ الحل

1) الحل العام للمعادلة $N'(t)=-k\times N(t)$ هو $N(t)=\lambda e^{-kt}$

بما ان $N(0)=N_0$ فإن $\lambda e^0=N_0$ ومنه $\lambda=N_0$ إذن $N=N_0e^{-kt}$

2) كمية الكربون في اللحظة $t=10000$ سنة هي $N_1=N_0\,e^{-k\times10000}$

نسبة الكربون C^{14} المفقودة خلال 10000 سنة هي $\frac{N_1-N_0}{N_0}$.

$$\frac{N_1-N_0}{N_0}=\frac{N_0\,e^{-k\times10000}-N_0}{N_0}=e^{-k\times10000}-1=-0,712$$

إذن نسبة الكربون المفقودة خلال 10000 سنة هي % 7,12.

3) ا) $N(t+T)=N_0\,e^{-k(t+T)}=N_0\,e^{-kt}\times e^{-kT}=N(t)\times e^{-kT}$

بما ان $N(T)=\frac{1}{2}N_0$ فإن $N_0e^{-kT}=\frac{1}{2}N_0$ اي $e^{-kT}=\frac{1}{2}$

إذن (*) .... $N(t+T)=N(t)\times\frac{1}{2}$

ب) بوضع $t=0$ العلاقة (*) تصبح $N_0\,e^{-kT}=N_0\times\frac{1}{2}$ ومنه نستنتج ان $e^{-kT}=\frac{1}{2}$

من المساواة $e^{-kT}=\frac{1}{2}$ نجد $T=\frac{Ln(2)}{k}$ بتعويض قيمة k نجد $T\approx5567,45$

اي تقريبا 5568 سنة .

4) لدينا $\frac{N(t)}{N_0}=20\,\%$ و منه $N(t)=N_0\times0,20$.

$N_0e^{-kt}=N_0\times0,2$ تكافئ $e^{-kt}=0,2$ يكافئ $-kt=Ln(0,2)$

و منه نجد $t=\frac{Ln(0,2)}{-k}$ و بالحساب نجد $t\approx12927$.

تمارين و مسائل

1-

حل المعادلات التالية :

1) $e^{x-3}=1$ ، 2) $e^{4x^2+6}=e^{14x}$ ، 3) $e^{x}-e^{-2x}=0$

4) $\left(e^{-2x}-e\right)\left(e^{6x}+5\right)=0$ ، 5) $Ln\left(e^{x}-4\right)=5$ ، 6) $\dfrac{e^{2x}+2e^{x}-4}{3e^{x}-2}=1$

7) $e^{x}-2e^{-\frac{x}{2}}-5=0$ ، 8) $e^{2x}=2e^{-x}$ ، 9) $e^{4x}-3e^{2x}+2=0$ ،

10) $e^{-x}+e^{x}+2=0$ ، 11) $e^{3x}-\left(e^{2}-1\right)e^{2x}=e^{x+3}$

2-

1) عين جذور كثير الحدود $P(x)$ حيث $P(x)=2x^2+9x-5$ مستنتجا تحليلا له.

2) ادرس إشارة كل من $\left(e^{x}+5\right)$ و $\left(2e^{x}-1\right)$

3) باستعمال الأسئلة السابقة حل المتراجحة $2e^{2x}+9e^{x}-5>0$.

3-

حل المعادلات و المتراجحات التالية :

1) $2-e^{x}\geq 0$ ، 2) $e^{2x^2-1}\geq 3$ ، 3) $\left(e^{x}\right)^2\leq 4$

4) $e^{x}-2e^{-x}<0$ ، 5) $\left(e^{x}-1\right)e^{x}\geq 2\left(e^{x}-1\right)$ ، 6) $3e^{2x}+e^{x}-4<0$

7) $\dfrac{e^{x}-4}{e^{x}+4}\leq\dfrac{e^{x}-3}{e^{2x}+3}$ ، 8) $e^{x+1}>2^{x}$ ، 9) $e^{|x-1|}\geq 1$ ، 10) $2^{2x}+2^{x+1}-3>0$

11) $2^{x+2}-10\times 2^{x+1}+12=0$ ، 12) $3^{x}+2\times 3^{-x-1}=7$ ، 13) $4^{x}+2^{x+1}-3\leq 0$

4-

حل في $\mathbb{R}^2$ الجمل التالية :

أ) $\begin{cases} xy=14 \\ e^{x}e^{y}=e \end{cases}$ ، ب) $\begin{cases} e^{x+y}+e^{3y}=2e^{4} \\ \dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{2y}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ ، جـ) $\begin{cases} e^{x}-\dfrac{1}{e}e^{y}=1 \\ 2e^{x}+e^{y}=4+e \end{cases}$

5-

أحسب نهايات الدالة f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $f(x)=x+3+xe^{x}$ ؛ ب) $f(x)=x+2+\dfrac{5}{e^{x}+1}$ ، جـ) $f(x)=\dfrac{e^{x}-3}{e^{x}+2}$

د) $f(x)=\dfrac{5x-2}{e^{x}+2}$ ، هـ) $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x-2}$ ، و) $f(x)=\dfrac{3x+1}{x}e^{x}$

6-

ادرس نهاية الدالة f في المكان المعطى في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $f(x)=\dfrac{e^{x}-2}{3x}$ عند 0 ، ب) $f(x)=5xe^{-x}$ عند $+\infty$.

جـ) $f(x)=\dfrac{3e^{x}-3}{3x-3}$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ ، د) $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{xe^{x}+1}$ عند $(+\infty)$

هـ) $f(x)=e^{2x}-e^{x}+1$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

و) $f(x)=\dfrac{x+1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ عند 0 و $(+\infty)$ و $(-\infty)$

ي) $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{x+3\sqrt{x}}$ عند 0 ، ف) $f(x)=\dfrac{e^{4x}-2e^{2x}+1}{4x^2}$ عند 0 .

7-

f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة $f(x)=20x-600-e^{-0,5x+1}$

1) عين نهاية f عند $(+\infty)$.

2) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=20x-600$ مقارب مائل لمنحني الدالة f و ليكن (γ)

3) أدرس الوضعية النسبية لـ (γ) بالنسبة إلى (d)

8-

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x-1-2e^{x}$

1- أ) أدرس نهاية f عند $(-\infty)$

ب) بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحني (γ) الممثل f.

2) أدرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d).

3) بين انه نستطيع كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=e^{x}\left(\dfrac{x}{e^{x}}-\dfrac{1}{e^{x}}-2\right)$

ثم استنتج نهاية f عند $(+\infty)$.

9-

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=Ln\left(e^{x}+2\right)$ و (γ) منحناها البياني في معلم.

1) ادرس نهاية f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$

2) بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $f(x)=x+Ln\left(1+2e^{-x}\right)$ ثم استنتج ان (γ) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (d) في جوار $(+\infty)$.

3) ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d).

10

عين الدالة المشتقة لكل دالة من الدوال المعطاة مع تعيين المجموعة التي تكون فيها الدالة قابلة للاشتقاق.

1) $f(x)=x^3 e^x$ 2) $f(x)=\frac{e^x}{x-2}$

3) $f(x)=2+\frac{e^x}{e^x-1}$ 4) $f(x)=(3x+5)e^x$

5) $f(x)=(\sin x)e^x$ 6) $f(x)=\left(-3x^2+2x\right)e^{-x}$

7) $\left(f(x)=e^{-x}-\sqrt{x}+2\right)$ 8) $f(x)=e^{x^2+3x+2}$

9) $f(x)=\frac{e^{3x+1}}{x+3}$ 10) $f(x)=\frac{3x+1}{e^{x+2}}$

11) $f(x)=(\cos x)e^{\frac{1}{x}}$ 12) $f(x)=(x-1)e^{x^2}$

11

عين في كل حالة من الحالات التالية مجموعة تعريف الدالة f و المجموعة التي تكون فيها f قابلة للاشتقاق ثم احسب $f'(x)$

1) $f(x)=e^{\cos x}$ ، 2) $f(x)=e^{\frac{1}{x}+1}$ ، 3) $f(x)=e^{x+|x|}$

4) $f(x)=e^{x+\sin x}$ ، 5) $f(x)=Ln\left(e^x+|x|\right)$ ، 6) $f(x)=\frac{e^{-|x|}-2}{e^x}$

12

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(2-x)e^x$ ما مصداقية المعلومات التالية ؟

1) جدول تغيرات f هو :

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$f'(x)$	+ 0 -
تغيرات f	0 ↗ e ↘ $-\infty$

2) من اجل كل عدد حقيقي $m > 0$ و $m \neq e$ المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلان أو و لا حل

3) المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب للمنحني الممثل لـ f.

13

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ax+b-\frac{4e^x}{e^x+2}$ و ليكن (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس ، A نقطة إحداثيها $\left(Ln(2), Ln(2)\right)$

1) اوجد a و b بحيث (γ) يمر من A و يقبل عندها مماسا موازيا لمحور الفواصل.

2-ا) ادرس تغيرات الدالة المحصل عليها في السؤال 1).

ب) ارسم (γ) و المماس عند A.

14

f دالة معرفة على $]-4,+\infty[$ و منحناها البياني (γ) في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ كما في الشكل

1) شكل جدول تغيرات f.

2) ا) عين تغيرات الدالة g المعرفة بـ $g(x)=e^{f(x)}$

ب) عين صور الأعداد -4 ، -2 ، -1 ، $-\frac{1}{2}$ ، 0 ، 1 بالدالة g

جـ) ما هي نهاية g عند $(+\infty)$ ؟

3) ارسم المنحنى البياني للدالة g في المعلم السابق

4) حل بيانيا المعادلة $f(x)=0$ ثم المتراجحة $f(x)\geq\frac{3}{2}$ ، ثم استنتج حلول المعادلة $g(x)=1$ و حلول المتراجحة $g(x)\geq e\sqrt{e}$.

15

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2e^x-x-2$

1) عين نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ ثم شكل جدول تغيرات f.

2) استنتج من السؤال (1) ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلان α و β بحيث $-1,5 \geq \alpha \geq -1,6$

3) عين إشارة $f(x)$ حسب قيم x.

16

ادرس تغيرات الدوال التالية :

1) $f(x)=xe^x-2$ 2) $f(x)=x-2+e^x$ 3) $f(x)=\frac{e^x-3}{e^x+3}$

4) $f(x)=\frac{x-3}{e^x}$ 5) $f(x)=\frac{e^x}{x-2}$ 6) $f(x)=x-2+e^{-x}$

7) $f(x)=\frac{2e^x}{e^x+2}$ 8) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

17

f دالة معرفة كما يلي $\begin{cases} f(x)=2e^{x-1}-1 & , \quad x\leq 1 \\ f(x)=1+Ln\,x & , \quad x>1 \end{cases}$

(γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس .

1) هل f مستمرة عند $x_0=1$ ؟

2) ادرس قابلية اشتقاق f عند $x_0=1$.

3) عين معادلة المماس لـ (γ) عند النقطة $A(1,1)$

4) ادرس تغيرات f ثم ارسم (γ) .

18

f دالة معرفة على $[0,+\infty[$ بـ $f(x)=(2-x)e^x-1$ و (γ) منحناها البياني.

1) ادرس تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها .

2) ارسم (γ) في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $1\leq\alpha\leq 2$ ثم عين قيمة تقريبية لـ α بتقريب $0,01$

4) ادرس إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

19

g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=xe^x-1$

1-أ) ادرس تغيرات g ثم استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث $\alpha e^{\alpha}=1$

ب) اعط حصرا لـ α بتقريب $0,1$.

2) لتكن f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=e^x-Ln\,x$

أ) تحقق أنه من اجل كل $x>0$ يكون $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$

ب) ادرس تغيرات f ثم ارسم (γ) التمثيل البياني لها في معلم متعامد و متجانس.

20

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{2x}-e^x-2$ ، (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) عين نهاية f عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

3) ادرس تغيرات f ثم ارسم (γ)

4) ناقش حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x التالية $e^{2x}-e^x-2-m=0$ جبريا و بيانيا.

21

f دالة معرفة على $]-1,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{e^x}{(1+x)^2}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) عين نهاية f عند -1 و $(+\infty)$ ثم ماذا تستنتج حول المنحني (γ) ؟

2) احسب $f'(x)$ من اجل كل x من $]-1,+\infty[$ و بين أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $\frac{x-1}{x+1}$

3) شكل جدول تغيرات f ثم ارسم المنحني (γ) .

22

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(x-e)e^{-x}+1-x$

و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) عين نهاية f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$

2) احسب $f'(x)$ وبين أن لدينا $f'(x)=e^{-x}h(x)$ حيث h دالة يطلب تعيينها.

3-أ) ادرس حسب قيم x إشارة $e-e^x$ ثم استنتج أن إذا كان :

$x>1$ فإن $1-x+e-e^x<0$ و $x<1$ فإن $1-x+e-e^x>0$

ب) شكل جدول تغيرات f مستنتجا أن $f(x)$ دوما سالبة.

4-أ) بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y=1-x$ مقارب مائل لـ (γ) ثم ادرس الوضع النسبي لـ (γ) بالنسبة إلى (d) .

ب) بين أنه توجد نقطة وحيدة A من (γ) بحيث المماس لـ (γ) عندها يوازي (d) .

23

f دالة معرفة على مجال $]0,+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{Ln(e^{2x}-1)}{e^x}$ و (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

I) g دالة معرفة على $]1,+\infty[$ بـ $g(x)=2x-(x-1)Ln(x-1)$

أ) ما هي نهاية $g(x)$ لما x يؤول إلى 1 ؟

ب) احسب $g'(x)$ من اجل كل $x \rangle 1$.

جـ) حل المتراجحة $0 \langle 1-Ln(x-1)$ على $]1,+\infty[$

د) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

هـ) بين ان للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد α على المجال $[e+1, e^3+1]$ و ادرس إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

2) لتكن h دالة معرفة على $]1,+\infty[$ بـ $h(x)=\frac{Ln(x^2-1)}{x}$

أ) عين نهاية $h(x)$ لما x يؤول إلى 1 و بين ان نهاية $h(x)$ لما $x \to +\infty$ تساوي 0

ب) احسب $h'(x)$ و بين ان $h'(x)$ من إشارة $g(x^2)$ على المجال $]1,+\infty[$

جـ) بين ان h متزايدة تماما على المجال $]1, \sqrt{\alpha}]$ و متناقصة تماما على $[\sqrt{\alpha},+\infty[$

3- أ) تحقق انه من اجل كل $x \rangle 0$ يكون $f(x)=h(e^x)$

ب) - استنتج نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى 0 و لما x يؤول إلى $(+\infty)$

- استنتج اتجاه تغير f على المجال $]0,+\infty[$

- استنتج أن f تقبل قيمة حدية عظمى عند $Ln(\sqrt{\alpha})$ ثم ارسم (γ) .

24

I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=2e^x+2x-7$

1) ادرس نهاية g عند $-\infty$ و $(+\infty)$

2) ادرس إتجاه تغير g على $\mathbb{R}$ مشكلا جدول تغيراتها.

3) أ) بين ان للمعادلة $g(x)=0$ حل وحيد α حيث $\alpha \in]0,94 ; 0,941[$

ب) عين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(2x-5)(1-e^{-x})$ و (γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1) ادرس إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

2) ادرس نهاية f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$

3) احسب $f'(x)$ و تحقق أن $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة مشكلا جدول تغيرات f .

4) أ) بين صحة المساواة التالية $f(\alpha)=\frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة h المعرفة بـ $h(x)=\frac{(2x-5)^2}{2x-7}$ على المجال $]-\infty , \frac{5}{2}]$

جـ) استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$ بتقريب $0,01$.

د) بين ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y=2x-5$ مقارب لـ (γ) عند $(+\infty)$ محددا وضعية (γ) بالنسبة إلى (d) ثم ارسم (d) و (γ) في نفس المعلم.

III) من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ نعتبر النقط A_n ، B_n و C_n ذات الفاصلة n ،

تنتمي على التوالي إلى محور الفواصل، المستقيم (d) و المنحني (γ) ، و ليكن U_n عدد حقيقي معرف بـ $U_n=\frac{C_n A_n}{A_n B_n}$

1- أ) بين انه من اجل $n \geq 3$ لدينا $U_n=\frac{2n-5-f(n)}{2n-5}$

ب) ما هي طبيعة المتتالية (U_n) ؟

جـ) احسب نهاية المتتالية (U_n) لما $n \to +\infty$ هل نستطيع تكهن هذه النتيجة من قبل ؟

25

f دالة معرفة بـ $f(x)=e^{-x}\sin 2x$

1) احسب $f'(x)$.

2) بين أن حلول $f'(x)=0$ تمثل متتالية حسابية و أن صورها بالدالة f تشكل متتالية هندسية .

26

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2}{x+1}e^{\frac{1}{x+1}} , & x\neq -1 \\ f(-1)=0 \end{cases}$

1) ادرس استمرارية و قابلية اشتقاق f عند -1 .

2) ادرس تغيرات f ثم ارسم (γ) منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس.

27

احسب النهايات التالية :

(1 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1}{(\sin x)^3}$ ، (2 $\lim_{x\to 0} x e^{\frac{1}{\sin x}}$ ، (3 $\lim_{x\to -3}(x+3)e^{\frac{x+1}{x+3}}$

(4 $\lim_{x\to 0}\frac{Ln(x+1)-e^x+1}{x^2}$ ، (5 $\lim_{x\to +\infty} x^3\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$

28

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^2e^x$

$f^{(1)}$ ، $f^{(2)}$ ، ... $f^{(n)}$ هي مشتقات متتالية لـ f من $n\geq 1$.

1) احسب من اجل كل x ؛ $f^{(1)}(x)$ ، $f^{(2)}(x)$ ، $f^{(3)}(x)$

2) بين بالتراجع انه من اجل $n\geq 1$ لدينا $f^{(n)}(x)=e^x(x^2+\alpha_n x+\beta_n)$

حيث α_n و β_n عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

3) تحقق ان $\begin{cases}\alpha_{n+1}=\alpha_n+2 \\ \beta_{n+1}=\beta_n+\alpha_n\end{cases}$

4) تحقق ان (α_n) هي متتالية حسابية يطلب تعيين α_n بدلالة n .

5) بين انه من اجل كل $n\geq 1$ يكون $\beta_n=\alpha_n+\alpha_{n-1}+\ ...\ +\alpha_2+\alpha_1$

ثم احسب β_n بدلالة n

29

(E) معادلة تفاضلية (E) .... $2y'+3y=0$

1) عين كل حلول المعادلة (E).

2) (E') هي المعادلة التفاضلية $2y'+3y=x^2+1$

أ) عين f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية حلا لـ (E').

ب) بين انه إذا كانت g حلا لـ (E') فإن $g-f$ حلا لـ (E) و العكس صحيح.

جـ) اوجد كل حلول المعادلة (E').

3) اوجد كل حلول المعادلة $2y'+3y=\cos x$

(البحث عن الحل من الشكل $h(x)=a\cos x+b\sin x$)

30

عين الحل f للمعادلات التفاضلية المقترحة :

أ) $y'=-3y$ و $f(0)=2$ ، ب) $2y'+5y=0$ و $f(1)=0$

جـ) $y-2y'=0$ و $f'(1)=1$ ، د) $y'=-3y+1$ و $f(1)=0$

31

(E) معادلة تفاضلية بحيث $y'=-y+4$

1) عين الحل f لـ (E) بحيث $f(0)=2$

2) ارسم المنحنى الممثل لـ f على $[0,2]$ في معلم متعامد و متجانس.

3) ارسم في نفس المعلم تمثيلا مقربا لبيان f بواسطة طريقة اولر.

32

(E) معادلة تفاضلية بحيث $y'-3y=+2$

بين صحة او خطأ كل قضية من القضايا التالية :

1) المعادلة (E) تقبل الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ce^{3x}+2$ مع $c\in\mathbb{R}$ حلولا لها.

2) الحل الخاص لـ (E) بحيث $f(0)=2$ هو $f(x)=\frac{1}{3}(5e^{3x}-2)$

3) الحل الخاص g للمعادلة (E) الذي منحناه البياني يقبل مماسا معامل توجيهه 3 عند النقطة ذات الفاصلة 0 المعرف بـ $g(x)=-\frac{2}{3}+e^{3x}$

4) المعادلة (E) تقبل الدوال f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=ce^{3x}+2x$ كحلول لها .

33

(E) معادلة تفاضلية معرفة بـ $y'+y=x+1$

نبحث عن الحل g المعرف بـ $g(x)=ax+b$ للمعادلة (E)

1) بين انه إذا كانت g حلا لـ (E) فإنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون :

$ax+a+b=x+1$ عندئذ عين a و b .

2) تحقق ان الدالة g المتحصل عليها هي حل لـ (E) .

3) بين ان الدالة f حل للمعادلة (E) إذا و فقط إذا كانت $f-g$ حلا $y'+y=0$ ...(E')

4) حل المعادلة (E') ثم (E).

34

(E) معادلة تفاضلية معرفة بـ $y'+y=2(x+1)e^{-x}$

1) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(ax^2+bx)e^{-x}$ حلا للمعادلة (E)

2-1) حل المعادلة (E') ... $y'+y=0$.

ب) بين ان الدالة f حل للمعادلة (E) إذا و فقط إذا كانت $f-g$ حلا لـ (E')

جـ) استنتج كل حلول المعادلة (E).

35

عند حقن مريض بكمية A من دواء ما فإن الكمية المتبقية في الدم عند اللحظة t بعد عملية التخلص الطبيعي هي $Ae^{-\frac{t}{24}}$. علما ان وحدة الزمن هي الساعة (h)، مبدأ الأزمنة هي لحظة الحقن، وحدة الحجوم هي (cm^3)

1) ما هي كمية الدواء المتبقية بعد 8 ساعات من الحقن ؟

2) نحقن هذا المريض بجرعة A كل 8 ساعات، مثل بيانيا كمية الدواء الموجودة في الدم خلال 72 ساعة التي تلي الحقن الأول.

3) يكون الدواء فعالا إذا و فقط إذا كان الدم يحتوي على كمية على الأقل تساوي $3,19A$. باستعمال البيان السابق عين اللحظة التي ابتداء منها يصبح هذا الدواء فعال.

4-1) بين انه بعد الحقن رقم n تكون كمية الدواء الموجودة في الدم هي $A\times\left(\frac{1-e^{-\frac{n}{3}}}{1-e^{-\frac{1}{3}}}\right)$

ب) اوجد بالحساب نتيجة السؤال (3) .

جـ) عندما تصبح كمية الدواء في الدم أكبر من $3,46A$ فإن الدواء يصبح خطيرا .

هل الاستمرار في وتيرة العلاج المطبقة في (2) خطيرة ام لا ؟ إذا علمت أن مدة العلاج المحددة من طرف الطبيب هي 4 أيام ؟